

PROPAGAÇÃO DE PULSOS DE IMPACTO EM BARRAS DE

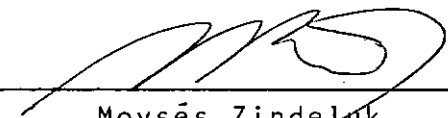
SEÇÃO TRANSVERSAL VARIÁVEL

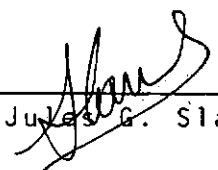
Eve Maria Freire de Aquino

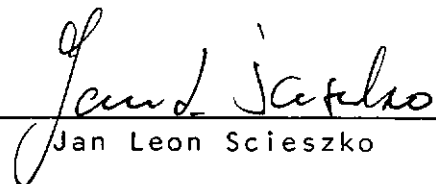
3

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

  
Moysés Zindeluk  
(Presidente)

  
Jules G. Slama

  
Jan Leon Scieszko

  
Luiz Bevilacqua

AQUINO, EVE MARIA FREIRE

Propagação de Pulsos de Impacto em Barras de Seção Transversal Variável (Rio de Janeiro) 1982.

VII, 111 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1982).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade Engenharia.

1. Propagação de Ondas Mecânicas. I. COPPE/UFRJ. II. Título (Série).

Aos meus pais  
e irmãos

## AGRADECIMENTOS

O meu agradecimento especial ao Prof. Moysés Zindeluk pela valiosa e dedicada orientação, concedendo-me seus conhecimentos na elaboração da presente tese.

Um reconhecimento de gratidão dedico ao Prof. Jules G. Slama pela co-orientação e incentivos constantes em to do o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Roberto Tenenbaum pela ajuda prestada e a Anderson Pessoa de Souza, técnico em eletrônica, pela dedicação e ajuda na montagem dos experimentos.

Agradeço também a Patricia Von Benkö Horvat pelos desenhos presentes na tese e a Jorge Luiz das Chagas pelo esmerado trabalho de datilografia.

Finalmente, agradeço a UFRN e a CAPES que tornaram possível os meus estudos na COPPE.

## SUMÁRIO

São desenvolvidos estudos numérico e experimental da propagação de pulsos de tensão em barras elásticas com variação de seção transversal em uma pequena região.

A equação dinâmica é estabelecida e solucionada pelo método das características. A integração numérica é obtida pelo processo das diferenças finitas, cujos resultados são comparados com os resultados experimentais.

Nos experimentos, os pulsos incidentes são gerados pelo impacto entre um projêtil e a barra.

## ABSTRACT

Numerical and experimental studies are carried on the propagation of stress pulses in elastic bars with variation of the cross-section in a small region.

The dynamic equation is established and solved through the method of characteristics. Numerical integration is obtained by finite-differences on a characteristic mesh, the results of which are compared with those obtained experimentally.

In the experiments, pulses are generated by impact between a projectile and the bar.

## ÍNDICE

## CAPÍTULO I

1 - INTRODUÇÃO .....	2
1.1 - PULSOS EM BARRAS UNIFORMES .....	5
1.2 - PULSOS GERADOS NO IMPACTO DE BARRAS .....	12
1.3 - TRANSMISSÃO E REFLEXÃO NA PRESENÇA DE DESCON- TINUIDADES .....	21

## CAPÍTULO II

2 - PROPAGAÇÃO EM MEIOS UNIDIMENSIONAIS NÃO HOMOGÊNOS ...	24
2.1 - PULSOS EM BARRAS COM SEÇÃO TRANSVERSAL VA- RIÁVEL .....	24
2.2 - MÉTODO DAS VARIÁVEIS CARACTERÍSTICAS .....	26
2.3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA .....	43

## CAPÍTULO III

3 - EXPERIMENTOS .....	54
3.1 - DESCRIÇÃO DOS EXPERIMENTOS .....	54
3.2 - UTILIZAÇÃO DO PROJÉTIL LONGO .....	61
3.3 - UTILIZAÇÃO DO PROJÉTIL CURTO .....	68

## CAPÍTULO IV

4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	74
4.1 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS: NÚMERICOS E EXPE- RIMENTAIS .....	74
4.2 - CONCLUSÕES .....	93

APÊNDICE A: ONDAS ELÁSTICAS .....	96
-----------------------------------	----

APÊNDICE B: TABELAS .....	105
---------------------------	-----

BIBLIOGRAFIA .....	110
--------------------	-----

## CAPÍTULO I



## 1 - INTRODUÇÃO

Os estudos numéricos e experimentais relacionados com os fenômenos de propagação, têm grande importância nas áreas da física e engenharia uma vez que esses fenômenos estão presentes nos movimentos da matéria em face de processos dinâmicos. Dentro desses processos, o fenômeno de propagação de ondas é especialmente importante em certos problemas tecnológicos, como a análise das deformações dinâmicas originadas no impacto entre corpos e a identificação dos parâmetros físicos, quando o meio é desconhecido ou quando no mesmo ocorrem mudanças importantes com relação a sua configuração original.

Grande parte das soluções apresentadas para os problemas de propagação, estão relacionadas a modelos lineares envolvendo meios homogêneos e configurações geométricas simples, tendo-se em vista a dificuldade de abordagem matemática.

A presença de inhomogeneidades no material, tais como a variação dos parâmetros constitutivos, ou ainda, uma não uniformidade em sua configuração geométrica, dificulta a análise de propagação, uma vez que se constata a ocorrência de variação, contínua ou não, na forma da onda propagante. A dificuldade encontrada na análise de propagação se deve à impossibilidade de obtenção de solução exata em virtude do efeito acumulativo de refrações e reflexões sucessivas.

A complexidade matemática aparente em tais problemas de propagação, pode ser reduzida com a utilização do método das características, ver seção 2.2.

O objetivo deste trabalho é verificar o comportamento da solução numérica do problema de propagação em meios não homogêneos, preparar uma técnica de ensaio e aquisição de dados, bastante difícil para eventos tão rápidos, e enfrentar as dificuldades de interpretação das discrepâncias entre os resultados teóricos e experimentais.

A não homogeneidade a ser aqui estudada, é caracterizada pela geometria não uniforme do corpo, decorrente da variação de suas dimensões transversais. A definição empregada acima para o termo "homogeneidade" se deve apenas à analogia matemática, levando-se em conta que a variação da forma do material em estudo se expressa como uma variação de coeficientes na equação de movimento.

De um modo geral, os estudos numéricos e experimentais aplicáveis a problemas de propagação em meios não homogêneos, se dividem em: estudos de simulação, onde se procura determinar a saída do sistema conhecendo-se a entrada e as características do meio, e os estudos de identificação, quando são conhecidas a entrada e saída do sistema e se busca a determinação de suas propriedades.

A validade da utilização do método das características na solução de problemas de propagação é aqui comprovada por sua rapidez e convergência. As limitações de validade do modelo unidimensional são aparentes quando da comparação dos resultados obtidos na simulação numérica, com as respostas obtidas em verificação experimental. Dentro do problema de simulação numérica é utilizado o processo das diferenças finitas aplicado a uma malha característica no plano  $xt$ , o qual é discutido com detalhes na seção 2.3. Na obtenção da solução numé

rica, foram dadas a forma de carregamento externo e as condições iniciais e de contorno requeridas pelo problema.

Para uma barra de seção variável, uma forma particular de excitação pode ser obtida pelo impacto com um projétil, experimento apresentado na seção 3.1.

Com o propósito de facilitar o entendimento do que seja o fenômeno de impacto entre corpos, encontra-se reportado na seção 2.1 um estudo prévio abordando vários tipos de impactos, possibilitando do processo, uma compreensão melhor de carregamento dinâmico.

Uma rápida abordagem da teoria unidimensional de propagação, bem como as suas limitações, é reportada na seção 1.1, com base no exame da propagação de pulsos de tensão em barras uniformes e os efeitos, sobre estes produzidos, quando em presença de condições de contorno.

## 1.1 - PULSOS EM BARRAS UNIFORMES

No apêndice A as equações de movimento para um meio sólido elástico isotrópico foram obtidas em termos de deslocamentos (A.9). A descrição da propagação de ondas de tensão em tais meios, para corpos limitados, pode ser obtida da solução dessas equações, levando em conta condições de contorno apropriadas.

Neste capítulo, a propagação de ondas, pulsos, de tensão ao longo de uma barra de área uniforme (meio unidimensional) será estudada. Dentro desse estudo, será abordado o caso mais simples que se aplica a propagação de ondas cujo comprimento é grande comparado à dimensão lateral da barra.

Os movimentos de partículas que ocorrem em uma barra cujo diâmetro é pequeno, caso particular, são classificados como longitudinal, torsional e lateral. Nos movimentos longitudinais os elementos da barra são estendidos e contraídos, mas não ocorre deslocamento lateral do eixo da barra. Nos movimentos torsionais, cada seção transversal permanece em seu próprio plano e gira em torno de seu centro. Aqui, o eixo da barra também permanece sem nenhuma variação. Para o caso dos movimentos laterais, a barra sofre flexão e os elementos do eixo central movem-se lateralmente durante o movimento.

O exame do comportamento de pulsos em barras de seção transversal constante, será abordado tomando-se em conta apenas o movimento longitudinal das partículas e considerando como sendo uniforme em cada seção transversal, as tensões atuantes sobre a barra, o que simplifica a obtenção da equação de movimento.

No cálculo da equação dinâmica uni-dimensional, [1], toma-se um elemento de comprimento  $\delta x$  e área da seção transversal  $A$  (ver figura 1.1).

Se a tensão em uma das faces é  $\sigma_{xx}$  a tensão na outra face será dada por  $\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x$ , obtém-se, para o deslocamento  $u$ , de acordo com a segunda lei de Newton, da quantidade de movimento:

$$-\sigma_{xx} A + A \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \right) = \rho A \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ou

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x A = \rho A \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade da barra.

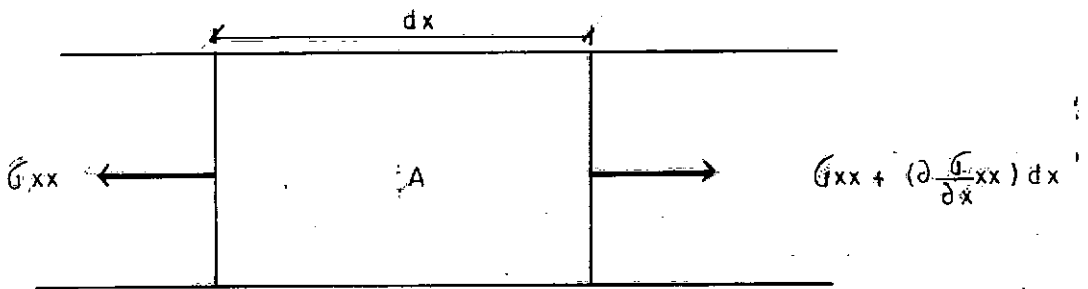


Figura 1.1 - Forças atuando no elemento da barra no movimento longitudinal.

Como a barra possui um diâmetro pequeno, onde os efeitos de inércia lateral são desprezados, e as tensões late-

rais nulas, pode-se partir da equação constitutiva uni-dimensional:

$$\sigma_{xx} = E(\epsilon_{xx}) \quad (1.2)$$

onde  $\epsilon_{xx}$  é a deformação, considerada pequena, que pode ser aproximada por  $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ , sendo  $\sigma_{xx}$  a tensão longitudinal e  $E$  o módulo de elasticidade do material da barra.

A equação de movimento pode ser agora escrita em termos de deslocamento, com a equação (1.1) resultando na forma:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

Esta equação representa a propagação de uma onda longitudinal, também dita onda de tensão, ao longo de uma barra com a velocidade de propagação dada por  $\sqrt{E/\rho}$ .

Observando o efeito causado nos elementos da barra pela passagem da onda de tensão ou seja, a contração ou expansão longitudinal, vê-se que o mesmo se dá acompanhado de expansão ou contração lateral. A relação uni-dimensional entre essas deformações lateral e longitudinal é dada pelo coeficiente de Poisson  $\gamma$ . Este movimento resulta em uma distribuição não uniforme de tensões e de deformações através das seções da barra, e as seções transversais tornam-se distorcidas. Assim, o tratamento empregado no cálculo da equação (1.3) é bastante idealizado, visto que as condições impostas ao modelo são: que as seções transversais planas da barra permanecem planas durante a passagem da onda de tensão e que a tensão atua uniformemente.

mente sobre cada seção.

Ao se estudar as soluções para a equação (1.3), verifica-se que esta admite solução geral da forma:

$$u = f(c_0 t - x) + F(c_0 t + x) \quad (1.4)$$

onde

$$c_0 = \sqrt{E/\rho} \quad (1.5)$$

Aqui  $F$  e  $f$  são funções arbitrárias dependendo das condições iniciais. A função  $f$  representa a onda se propagando no sentido crescente de  $x$  e a função  $F$  no sentido oposto.

Serão examinadas agora as consequências da solução (1.4) a qual se aplica à propagação de ondas elásticas cujos comprimentos são grandes, comparados as dimensões laterais da barra. Considerando a onda se propagando no sentido decrescente de  $x$  (apenas por conveniência), o deslocamento será da forma:

$$u = F(c_0 t + x) \quad (1.6)$$

Diferenciando ambos os lados da equação (1.6) com respeito a  $x$ , tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F'(c_0 t + x) \quad (1.7)$$

onde  $F'$  é a derivada com relação ao argumento. Da mesma forma diferenciando (1.6) com respeito a  $t$ , vem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_0 F'(c_0 t + x) \quad (1.8)$$

E a partir da equação constitutiva, conclui-se que:

$$\sigma_{xx} = \rho c_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.9)$$

ou ainda:

$$\sigma_{xx} = \rho c_0 v \quad (1.10)$$

onde  $v$  é definido como sendo  $\frac{\partial u}{\partial t}$ .

A equação acima mostra a existência de uma relação linear entre a tensão em qualquer ponto e a velocidade de partícula. Esta relação,  $\rho c_0$ , é denominada de "impedância característica" do material. Uma vez que a velocidade de propagação  $c_0$  independe da frequência, as ondas de tensão não apresentam dispersão [2].

Analizando-se o comportamento de um pulso de tensão ao longo de uma barra finita, vê-se que o mesmo ao chegar à extremidade livre da barra é refletido. Para se encontrar a natureza do pulso refletido assume-se que a condição de contorno de que as tensões normais à face da extremidade livre são nulas.

Seja o deslocamento do pulso incidente:

$$u_1 = F(c_0 t + x) \quad (1.11)$$



e o deslocamento do pulso refletido:

$$u_2 = f(x - c_0 t) \quad (1.12)$$

As tensões produzidas pelos dois pulsos são  $E \frac{\partial u_1}{\partial x}$  e  $E \frac{\partial u_2}{\partial x}$  respectivamente. A tensão resultante fica:

$$E \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = E \left[ F'(c_0 t + x) + f'(x - c_0 t) \right] \quad (1.13)$$

Adotando a origem  $x = 0$  na extremidade, a condição de que essa extremidade é livre de tensão resulta:

$$F'(c_0 t) + f'(-c_0 t) = 0 \quad (1.14)$$

Assim a forma do pulso refletido é a mesma do pulso incidente, mas de sinal oposto (ver figura 1.2).

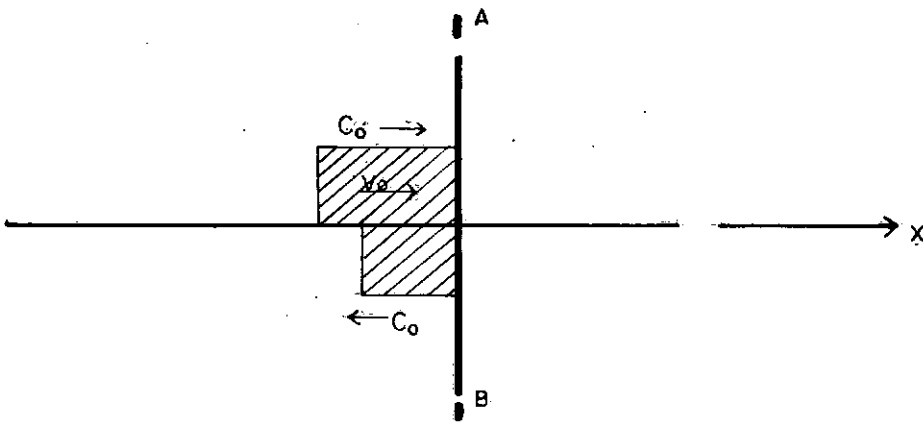


Figura 1.2 - Pulso refletido na extremidade livre AB.  $v_0$  velocidade da partícula.

Logo um pulso incidente de compressão é refletido como pulso de tração. Já o deslocamento em qualquer ponto da barra é a superposição dos dois, ou seja,  $u_1 + u_2$  e na extremidade livre da barra ( $\dot{x} = 0$ ) é  $2F(c_0 t)$ . Assim o deslocamento e consequentemente a velocidade da partícula na extremidade livre é duas vezes maior do que o seu valor ao longo da barra.

Quando um pulso de compressão chega a um contorno rígido na extremidade da barra, a condição de contorno imposta é de que o deslocamento seja nulo. Em  $x = 0$ , de (1.11) e (1.12), o deslocamento resultante assume a forma:

$$F(c_0 t) + f(c_0 t) = 0 \quad (1.15)$$

Com isto o deslocamento do pulso refletido ( $u_2$ ) é igual e oposto ao do pulso incidente ( $u_1$ ). Logo a tensão produzida pelo pulso refletido  $E \frac{\partial u_2}{\partial x}$  é igual a tensão produzida pelo pulso incidente  $E \frac{\partial u_1}{\partial x}$ . Assim, o pulso compressivo incidente é refletido sem variação, uma vez que a distribuição de tensão permanece a mesma, enquanto que, tanto o sentido de deslocamento quanto o de propagação da onda são opostos. O valor da tensão na extremidade rígida da barra é o dobro do seu valor ao longo da mesma (ver figura 1.3).

A geração e a descrição do comportamento de pulsos ao longo de uma barra, será discutida nas próximas seções.

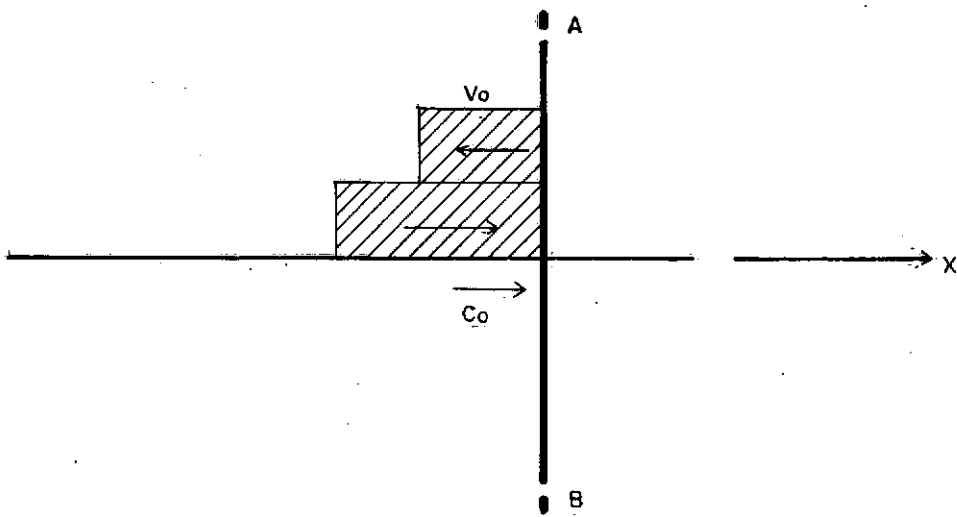


Figura 1.3 - Pulso refletido na extremidade rígida AB.

## 1.2 - PULSOS GERADOS NO IMPACTO DE BARRAS

O fenômeno de propagação de ondas de tensão em um sólido ocorre sempre que existe um estado de desequilíbrio mecânico interno. Uma forma comum e fortemente localizada desse desequilíbrio, ocorre quando da colisão ou impacto de dois corpos.

No processo de impacto entre dois corpos, trata-se na realidade, do distúrbio gerado na região de contato, o qual se propaga para o interior dos corpos com velocidade finita e cujas reflexões nas superfícies de contorno, produzem oscilação durante o impacto e vibrações residuais após o seu fim. As deformações e as tensões criadas por esse distúrbio, podem ser determinadas pela análise da propagação do pulso quando os corpos apresentam uma forma bastante simples.

Nesta seção, estuda-se o impacto colinear entre duas barras finitas, cujas superfícies de contato se apresentam perfeitamente planas. Para este estudo, a intensidade da ten-

são longitudinal  $\sigma$  e a velocidade da partícula  $v'$ , estão relacionadas na equação (1.10).

A variação da velocidade da partícula será obtida inicialmente, para o caso da colisão de duas barras de mesma seção transversal  $A$  e impedâncias mecânicas ( $\rho c$ ) diferentes, ver figura (1.4-a). Sejam as velocidades iniciais das barras, respectivamente,  $v_{1,i}$  e  $v_{2,i}$ , com  $v_{1,i} > v_{2,i}$ .

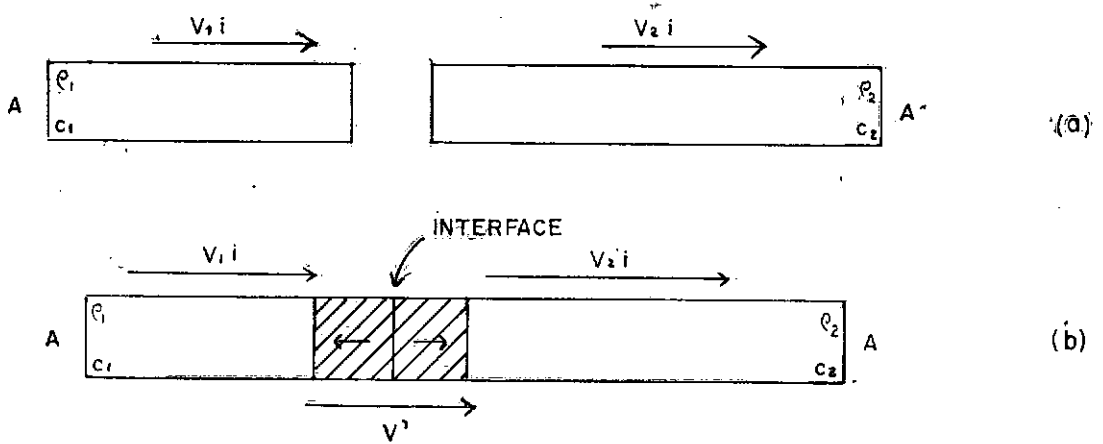


Figura 1.4 - Variação da velocidade da partícula no impacto colinear entre duas barras.

Logo após o impacto, ver figura (1.4-b), ondas longitudinais de compressão, de intensidades  $|\Delta\sigma| = \rho c |\Delta v|$  se propagam no interior de cada barra com velocidades de propagação  $c_1$  e  $c_2$ , respectivamente [3]. Estas ondas são originadas na interface comum de impacto, sendo que as partículas atingidas pelas ondas em cada barra e, em particular, a interface comum de impacto, adquirem a mesma velocidade  $v'$ . Verificando-se a condição de equilíbrio da interface, e sabendo-se que as barras possuem a mesma área transversal, consequentemente a tensão gerada em cada barra é a mesma. Logo a expressão da ten

são válida para a barra de velocidade inicial  $v_{1,i}$  é  $\rho_1 c_1 (v' - v_{1,i})$ . Assim o termo  $v$  na equação (1.10) representa o salto na velocidade da partícula através da frente de onda.

A partir da condição de equilíbrio, as expressões para  $v'$  e  $\sigma$  são obtidas na forma:

$$\Delta\sigma = \rho_2 c_2 (v_{2,i} - v') = \rho_1 c_1 (v' - v_{1,i})$$

vem que

$$v' = \frac{\rho_1 c_1 v_{1,i} + \rho_2 c_2 v_{2,i}}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

ou, adotando a notação:  $Z_1 = \rho_1 c_1$  e  $Z_2 = \rho_2 c_2$ ,

$$v' = \frac{Z_1 v_{1,i} + Z_2 v_{2,i}}{Z_1 + Z_2} \quad (1.16)$$

e

$$\sigma = \frac{v_{2,i} - v_{1,i}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} \quad (1.17)$$

Logo, os saltos em velocidades nas frentes de ondas em cada barra assumem os valores:

$$\left[ \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right] [v_{2,i} - v_{1,i}] ; \text{ barra 1}$$

e

$$\left[ \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right] [v_{1,i} - v_{2,i}] ; \text{ barra 2}$$

Com as equações (1.16) e (1.17) a análise de vários tipos de impacto pode ser realizada.

Outros aspectos importantes a serem discutidos no processo de impacto entre dois corpos, são o tempo de duração e o comportamento dos pulsos de tensão, no interior de cada barra, quando em presença das superfícies de contorno.

Considere-se na elaboração desse estudo um caso mais simples de impacto, colinear em que as duas barras tem o mesmo comprimento  $L$ , mesmo material e áreas transversais idênticas. Assumindo que para um tempo  $t = 0$  as velocidades iniciais,  $v_{1,i}$ , das barras sejam iguais em valor absoluto ver figura (1.5-a), logo após o impacto, para  $0 < t < \frac{L}{c}$ , os pulsos gerados a partir da superfície de contato se propagam no interior de cada barra com intensidade  $|\Delta\sigma| \approx \rho c |\Delta v|$ , ver figura (1.5-b).

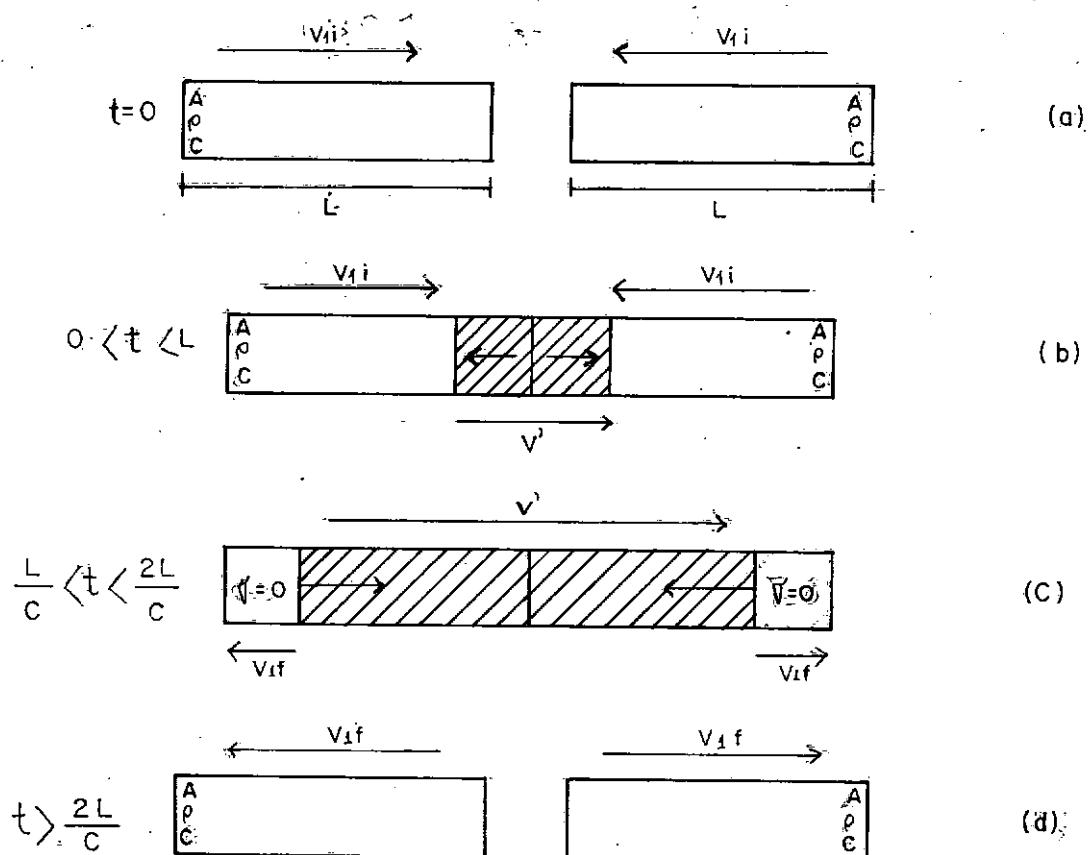


Figura 1.5 - Impacto elástico entre barras idênticas

A partir da condição de equilíbrio na interface, tem-se a nova velocidade das partículas,  $v'$ :

$$\rho c(v' - v_{1,i}) = \rho c(v_{1,i} - v')$$

$$\implies v' = 0$$

Assim, após a passagem da frente de onda, as partículas tendem ao repouso. Aqui, as frentes de onda percorrem as barras com velocidade  $c$ , mas em sentidos opostos. Já para  $t = \frac{L}{c}$ , observe-se que as barras se encontram totalmente comprimidas e completamente em repouso.

A condição de contorno imposta nas barras de extremidade livre, ou seja, a tensão em suas extremidades é nula; as ondas de compressão são, para  $\frac{L}{c} < t < 2\frac{L}{c}$ , totalmente refletidas como ondas de tração, ver figura (1.5-c). Sendo assim, as tensões se anulam gradualmente, donde se conclui que, as ondas originadas nas superfícies de contorno funcionam como ondas de descarregamento. Para  $t = \frac{2L}{c}$ , onde se verifica o término do impacto, as partículas no plano comum de impacto apresentam velocidades iguais e opostas à incidente, enquanto as barras se encontram totalmente livres de tensão, ver figura (1.5-d).

Para completar o exame de impactos elásticos em barras de mesma área transversal, considere-se o caso de duas barras de mesmo material e de comprimentos e velocidades iniciais diferentes [4].

Adotando  $L_2 = 2L_1$ , figura (1.6-a) e que para  $t = 0$  se tenha  $v_{1,i} = 2v_{2,i}$ , descreve-se em seguida o com-

portamento dos pulsos ao longo de cada barra para diversos tempos de propagação. Logo após a colisão, as partículas, bem como a interface comum de impacto, adquirem uma velocidade comum de  $v' = \frac{1}{2} [v_{1,i} + v_{2,i}]$ . Para  $0 < t < \frac{1}{2} \frac{L_1}{c}$ , Pulsos de compressão se propagam em cada barra, cujas velocidades das frentes de onda são de  $\frac{1}{2} [v_{2,i} - v_{1,i}]$  e  $\frac{1}{2} [v_{1,i} - v_{2,i}]$  para as barras de comprimentos  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente, ver figura (1.6-b).

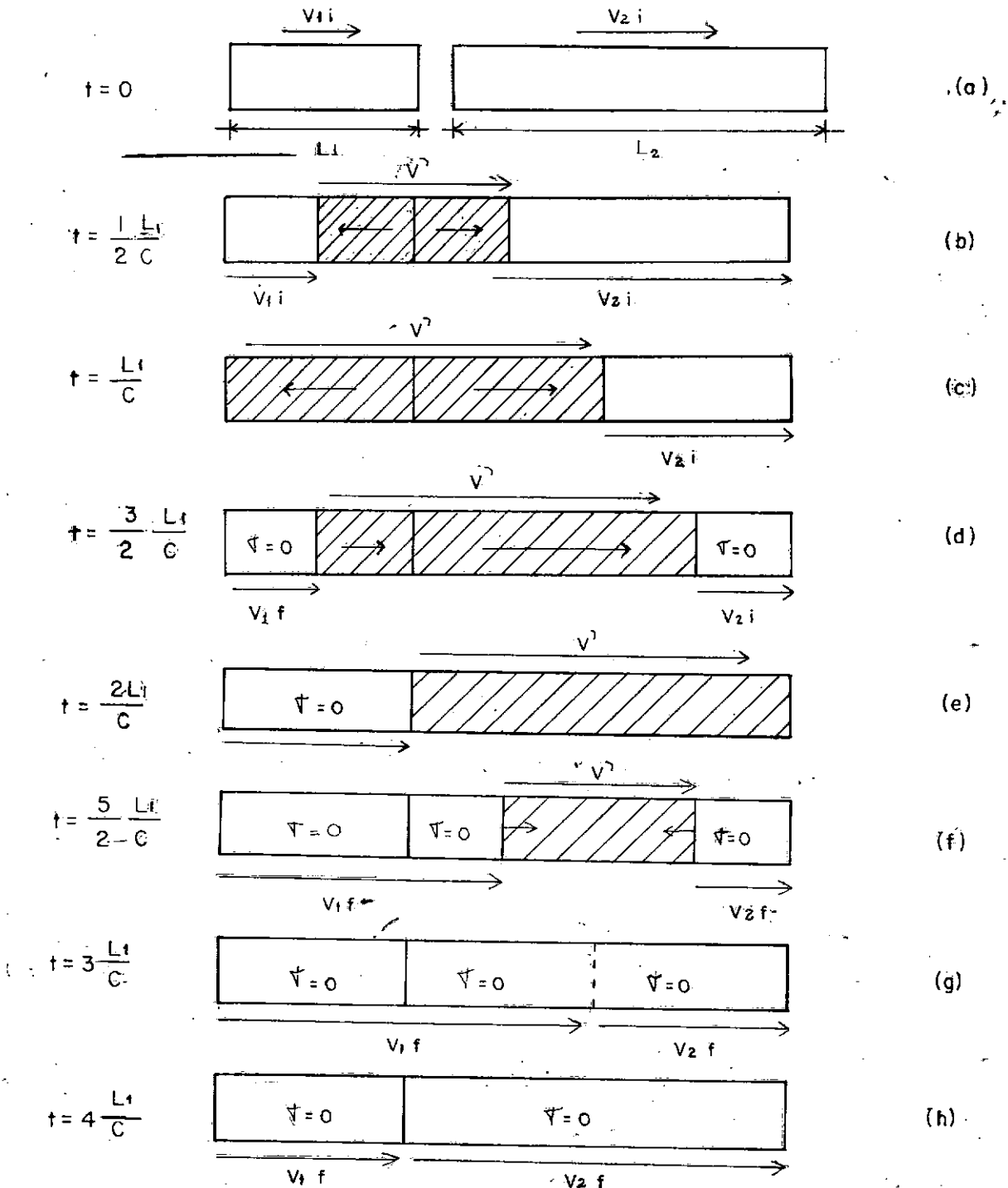


Figura 1.6 - Impacto elástico entre barras de comprimentos diferentes.



No instante  $t = \frac{L_1}{c}$ , figura (1.6-c), o pulso de compressão na barra menor atinge a sua extremidade livre, enquanto a barra maior se encontra parcialmente comprimida. Já para  $t = \frac{3}{2} \frac{L_1}{c}$ , o pulso de compressão na barra menor está parcialmente anulado pelo pulso de tração, refletido de sua extremidade livre, cujas partículas, após a sua passagem, adquirem a velocidade  $v_{1,f} = v_{2,i}$ , como indicada na figura (1.6-d). Nesse instante o distúrbio não atingiu ainda a extremidade livre da barra maior.

A barra menor se encontra livre de tensão em  $t = 2 \frac{L_1}{c}$ , com velocidade final  $v_{2,i}$ . Apesar da mesma se encontrar livre de tensão, o contato continua e a segunda barra, se apresenta agora, toda ela comprimida com velocidade das partículas igual a  $v'$ , figura (1.6-e). Enquanto isso a interface comum de impacto passa a condição de extremidade livre, pois  $\sigma = 0$ , fazendo com que à esquerda se transmita a tração e a direita, se reflete a compressão como tração. Logo, para  $t = \frac{5}{2} \frac{L_1}{c}$ , figura (1.6-f), as partículas da extremidade direita adquirem a velocidade  $v_{2,f} = v_{1,i}$ , enquanto que, pela condição de equilíbrio na interface, as partículas localizadas na extremidade esquerda passam a ter a mesma velocidade da barra menor, ou seja,  $v_{1,f}$ . Observe-se que a parte central da barra maior encontra-se ainda comprimida. As duas barras permanecem em contato até o tempo  $4 \frac{L_1}{c}$ , quando a onda refletida na barra maior chega ao plano comum de impacto. Esta onda agora encontra a superfície livre, e não podendo ser transmitida à barra menor, reflete de acordo com a condição de contorno. Assim, sucessivas reflexões em ambas as extremidades da barra maior, resultam uma vibração ao longo desta. A amplitude da

tensão para essa oscilação é de  $|\sigma| = \frac{1}{2} \rho c [v_{1,i} - v_{2,i}]$ .

O mesmo processo empregado no estudo do comportamento do pulso no caso descrito acima, prevalece para o caso em que a barra maior se encontra em repouso. Para este caso específico, as velocidades nas frentes de onda e as amplitudes das tensões são obtidas pelas mesmas expressões do caso anterior, levando-se em conta a condição de  $v_{2,i} = 0$ .

Estuda-se agora o caso em que o impacto se verifica entre duas barras de seções transversais e impedâncias diferentes. Considere-se, então, uma barra  $B_1$  se movendo com velocidade inicial  $v_{1,i}$  e uma barra  $B_2$  se movendo na mesma direção com velocidade  $v_{2,i}$ , onde  $v_{1,i} > v_{2,i}$ , ver figura (1.7).

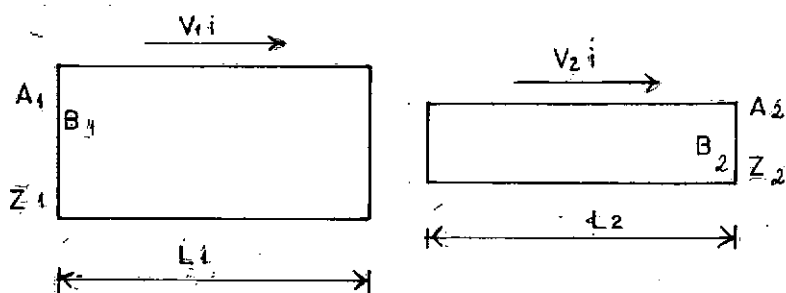


Figura 1.7 - Impacto elástico entre barras de áreas e impedâncias diferentes.

Sendo  $v'$  a velocidade comum em ambas as barras após o impacto, no tempo  $0 < t < \frac{L_1}{c_1} \frac{L_2}{c_2}$ , a partir da condição aproximada de que as forças atuante nas barras são iguais na interface comum, e adotando  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  como sendo as tensões geradas, têm-se que:

$$\sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2$$

ou ainda:

$$A_1 Z_1 (v_{1,i} - v') = A_2 Z_2 (v' - v_{2,i})$$

logo a velocidade comum às barras é dada por:

$$v' = \frac{A_1 Z_1 v_{1,i} - A_2 Z_2 v_{2,i}}{A_1 Z_1 + A_2 Z_2} \quad (1.18)$$

As expressões para  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  podem ser assim facilmente determinadas, resultando:

$$\sigma_1 = \frac{A_2 Z_1 Z_2 (v_{1,i} - v_{2,i})}{A_1 Z_1 + A_2 Z_2} \quad (1.19)$$

e

$$\sigma_2 = \frac{A_1 Z_1 Z_2 (v_{1,i} - v_{2,i})}{A_1 Z_1 + A_2 Z_2} \quad (1.20)$$

Ao analisar-se as expressões acima para barras de mesmo material, ou seja,  $Z_1 = Z_2$ , e escrevendo a relação das áreas como sendo  $A_1/A_2 = \gamma$ , a velocidade de impacto resulta na expressão:

$$v' = \frac{v_{2,i} + \gamma v_{1,i}}{1 + \gamma} \quad (1.21)$$

já para  $v' = 0$ , tem-se que  $v_{2,i} = \gamma v_{1,i}$ .

### 1.3 - TRANSMISSÃO E REFLEXÃO NA PRESENÇA DE DESCONTINUIDADES

Um outro aspecto a ser estudado na transmissão de um pulso em meios unidimensionais, é o seu comportamento em presença de uma mudança brusca das propriedades do meio. Considere-se para tal duas barras de impedâncias diferentes, perfeitamente unidas através de uma superfície de descontinuidade MN, ver figura (1.8). Tomando-se  $\sigma_i$  como sendo a intensidade da onda compressiva incidente propagando-se para a direita na barra  $B_1$  com seção transversal  $A_1$ , a mesma é parcialmente refletida e transmitida em MN..

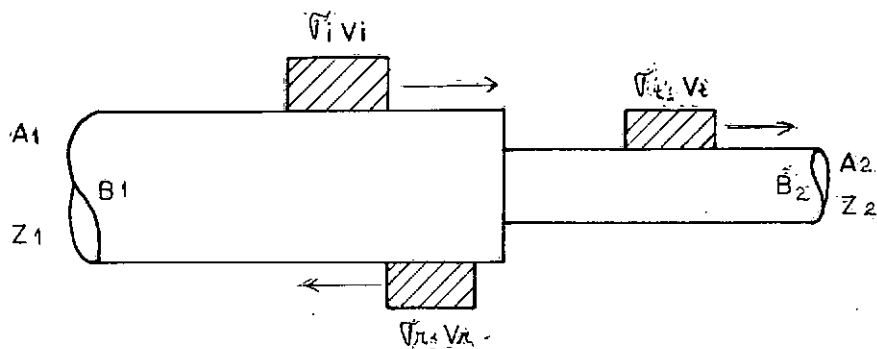


Figura 1.8 - Transmissão de um pulso em presença da descontinuidade MN.

A onda de tensão transmitida através de  $B_2$  de intensidade  $\sigma_t$ , bem como, a onda de tensão refletida ao longo de  $B_1$  de intensidade  $\sigma_r$ , são ambas governadas pela equação (1.10), satisfazendo a duas condições em MN:

- (i) As forças na interface plana MN atuando em  $B_1$  e  $B_2$  são iguais, para todo o tempo.
- (ii) A velocidade das partículas, nessa interface, para ambas as barras, é a mesma.

Assim, a primeira condição fornece que:

$$A_1 (\sigma_i + \sigma_r) = A_2 \sigma_t \quad (1.22)$$

e sabendo-se que  $\sigma_i$  e  $\sigma_r$  se deslocam em direções opostas, da segunda condição vem:

$$v_i - v_r = v_z \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_i - \sigma_r}{Z_1} = \frac{\sigma_t}{Z_2} \quad (1.23)$$

onde  $v$  representa a velocidade das partículas.

Das equações (1.22 - 1.23) pode-se assim determinar a intensidade das ondas de tensão transmitida e refletida [5], em função da intensidade da onda incidente:

$$\sigma_t = \left[ \frac{2 A_1 Z_2}{A_1 Z_1 + A_2 Z_2} \right] \sigma_i \quad (1.24)$$

e

$$\sigma_r = \left[ \frac{A_2 Z_2 - A_1 Z_1}{A_1 Z_1 + A_2 Z_2} \right] \sigma_i \quad (1.25)$$

Na análise das equações (1.24 - 1.25) observa-se que quando as barras  $B_1$  e  $B_2$  são do mesmo material, para uma simples variação na seção transversal, os pulsos incidente e refletido podem ter sinais iguais ou opostos, em havendo, acréscimo ou decréscimo, respectivamente, da área da seção transversal. Também a intensidade do pulso transmitido pode ser menor ou maior que a intensidade do pulso incidente.

CAPÍTULO II

## 2 - PROPAGAÇÃO EM MEIOS UNIDIMENSIONAIS NÃO HOMOGÊNEOS

### 2.1 - PULSOS EM BARRAS COM SEÇÃO TRANSVERSAL VARIÁVEL

O estudo teórico da propagação de ondas de tensão em barras com seção transversal variável, será aqui abordado com base na teoria elementar.

Considere-se inicialmente uma barra retilínea de seção transversal  $A(x)$ , com parâmetros físicos  $\rho(x)$  e  $E(x)$ . Supondo que sobre a mesma atuam tensões longitudinais  $\sigma(x, t)$  uniformes, em cada seção transversal, e carregamento axial externo  $P(x, t)$ , a equação dinâmica unidimensional para um elemento da barra, ver figura (2.1), é obtida a partir da quantidade de movimento linear. Tomando-se  $u(x, t)$  como sendo o deslocamento da partícula, tem-se:

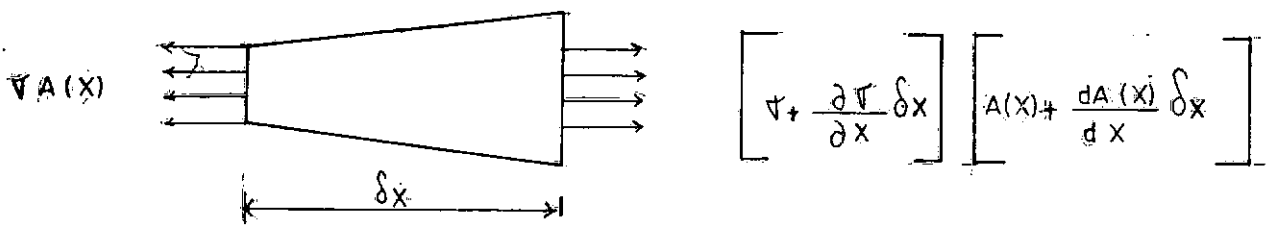


Figura 2.1 - Forças atuando em um elemento de seção variável.

$$-\sigma A(x) + \left[ \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \delta x \right] \left[ A(x) + \frac{dA(x)}{dx} \delta x \right] + P(x, t) \delta x = \rho(x) A(x) \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ou ainda:

$$\sigma \frac{dA(x)}{dx} + A(x) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + P(x, t) = \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Introduzindo na equação acima a notação:

$$\frac{d A(x)}{dx} = A', \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \sigma_x, \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}$$

A equação dinâmica resulta na forma:

$$\sigma \frac{A'}{A} + \sigma_x + \frac{P(x, t)}{A} = \rho(x) u_{tt} \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material.

Com a utilização da equação constitutiva (1.2) na equação acima, onde para pequenas deformações  $\epsilon = u_x$ , a equação (2.1) toma a forma geral da equação da onda.

$$u_{tt} - c^2 \left[ u_{xx} + \left( \frac{A'}{A} + \frac{E'}{E} \right) u_x \right] = F(x, t) \quad (2.2)$$

sendo  $c^2 = E/\rho$  a velocidade de propagação e  $F(x, t) = \frac{P(x, t)}{A(x) \rho(x)}$ .

Efetuando o estudo da propagação para o caso em que os parâmetros de materiais permanecem constantes e, ainda, que o meio não sofre excitação externa, ou seja,  $P(x, t) = 0$ , a equação (2.1) toma a forma:

$$\sigma \frac{A'}{A} + \sigma_x = \rho v_t \quad (2.3)$$

sendo  $v$  a velocidade das partículas do meio. Expressando a equação acima em termos de deslocamentos, tem-se:

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{xx} + \frac{A'}{A} u_x \right) \quad (2.4)$$



De um modo geral o estudo da propagação de ondas se dá em termos da tensão  $\sigma$ . Para este fim, deriva-se a equação (2.3) com relação a  $x$  e sabendo-se que,  $\sigma = E u_x$  a equação resultante será:

$$\sigma_{tt} = c^2 \left[ \sigma_{xx} + \frac{A'}{A} \sigma_x + \left( \frac{A'}{A} \right)' \cdot \sigma \right] \quad (2.5)$$

A equação (2.5) governa a propagação de ondas de tensão ao longo de uma barra fina, cuja não homogeneidade, é caracterizada pela variação de sua seção transversal.

A seleção dos métodos utilizados na resolução dos problemas físicos envolvendo equação diferencial parciais, está baseada na geometria do problema e no caráter das condições de contorno.

## 2.2 - MÉTODO DAS VARIÁVEIS CARACTERÍSTICAS

A análise da propagação de ondas em barras de seção variável será desenvolvida mediante a solução numérica de problemas de valor inicial (Cauchy) para as equações diferenciais parciais a duas variáveis independentes (2.4 - 2.5), tendo por base o estudo de características.

O método das características consiste na escolha de coordenadas apropriadas (coordenadas características) nas quais o sistema original de equações hiperbólicas, assume uma forma mais adequada à integração. Útil somente no caso de equações hiperbólicas, o método permite também a obtenção antecipada de várias propriedades e aspectos da solução [6].

Baseia-se o método na verificação da existência de curvas  $T$  tais que, tendo-se dados iniciais (valor da variável dependente e derivada normal) sobre  $T$ , seja impossível, com o uso da equação diferencial, ou o sistema diferencial equivalente, a determinação das derivadas da variável dependente normais à curva, de ordem superior. Tais curvas são denominadas curvas características e o problema de valor inicial dado em  $T$  não apresenta solução única. Pode-se depreender disto que a solução se propaga ao longo das curvas características não podendo assim, estender-se à sua vizinhança [7].

As equações de onda (2.4 - 2.5) possuem duas famílias independentes de curvas características sendo desta forma classificadas como equações hiperbólicas. As equações acima citadas podem também, ser representadas de um modo mais simples, ou seja, através de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, dados pela equação constitutiva e pela equação dinâmica (2.3) Logo adotado o sistema

$$\sigma_t = E V_x$$

$$\rho v_t = \sigma_x + \frac{A'}{A} \sigma \quad (2.6)$$

onde o índice indica derivadas parciais, o passo a seguir é a determinação de direções características no plano  $xt$ , ao longo das quais, o sistema (2.6) possa fornecer relações entre  $\sigma$  e  $V$  numa mesma direção.

Escrevendo o sistema acima na forma matricial, tem-se:

$$\underline{M}_1 \underline{W}_x + \underline{M}_2 \underline{W}_t + \underline{M}_3 \underline{W} = 0 \quad (2.7)$$

onde:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \sigma \\ v \end{bmatrix}; \quad \underline{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -E \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{M}_3 = \begin{bmatrix} A/A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema hiperbólico (2.7) possui em cada ponto duas direções características, cujas curvas integrais podem ser obtidas a partir de uma transformação de variáveis independentes:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, t) \\ \eta &= \eta(x, t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

com o jacobiano:

$$J = \det \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

não nulo em todos os pontos. Aplicando a transformação (2.8) em (2.7), tem-se:

$$\underline{M}_1 (\underline{W}_\xi \xi_x + \underline{W}_\eta \eta_x) + \underline{M}_2 (\underline{W}_\xi \xi_t + \underline{W}_\eta \eta_t) + \underline{M}_3 \underline{W} = 0$$

ou ainda:

$$(\underline{M}_1 \xi_x + \underline{M}_2 \xi_t) \underline{W}_\xi + (\underline{M}_1 \eta_x + \underline{M}_2 \eta_t) \underline{W}_\eta + \underline{M}_3 \underline{W} = 0$$

e, supondo que  $\frac{\xi_x}{\xi_t} = \frac{dt}{dx} \neq 0$  para todos os pontos vem que:

i) para  $\eta = \text{cte}$

$$(\underline{M}_1 + \frac{dx}{dt} \underline{M}_2) \underline{W}_\xi \xi_x + \underline{M}_3 \underline{W} = 0$$

ii) para  $\xi = \text{cte}$

$$(\underline{M}_1 + \frac{dx}{dt} \underline{M}_2) \underline{W}_\eta \eta_x + \underline{M}_3 \underline{W} = 0$$

Para as duas curvas acima, o sistema tem solução não trivial se:

$$\det \left[ \underline{M}_1 + \frac{dx}{dt} \underline{M}_2 \right] = 0$$

ou

$$\det \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} & -E \\ 1 & -\rho \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = 0$$

obtendo-se assim:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{E/\rho} = \pm c \quad (2.10)$$

A equação (2.10) especifica em cada ponto do plano  $x, t$  duas direções características. Observa-se que para cada curva característica acima, o sistema (2.7) se encon-

tra reduzido a uma única equação diferencial ordinária.

Escolhendo arbitrariamente os sinais em (2.10), o sistema escrito na forma diferencial resulta:

$$c^+: \xi = \text{cte}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \quad (a)$$

(2.11)

$$\rho c V_{\eta} = S_{\eta} + \frac{A_{\eta}}{A} S \quad (b)$$

$$c^-: \eta = \text{cte}$$

$$\frac{dx}{dt} = -c \quad (a)$$

(2.12)

$$\rho c V_{\xi} = -S_{\xi} - \frac{A_{\xi}}{A} S \quad (b)$$

onde  $V$  e  $S$  representam a tensão e a velocidade em função das novas variáveis  $\xi$  e  $\eta$ . Os índices em (2.11 - 2.12) indicam derivação.

Para o caso mais comum de dados iniciais (em  $t = 0$ ), as curvas características no plano  $x, t$  estão representadas na figura 2.2, bem como, o domínio de dependência da solução para um ponto qualquer  $P(x, t)$ . O valor da solução nesse ponto é determinado a partir dos valores iniciais prescritos no segmento  $AB$  do eixo dos  $x$ , e dos carregamentos externos em todo o domínio  $A.B.P.$

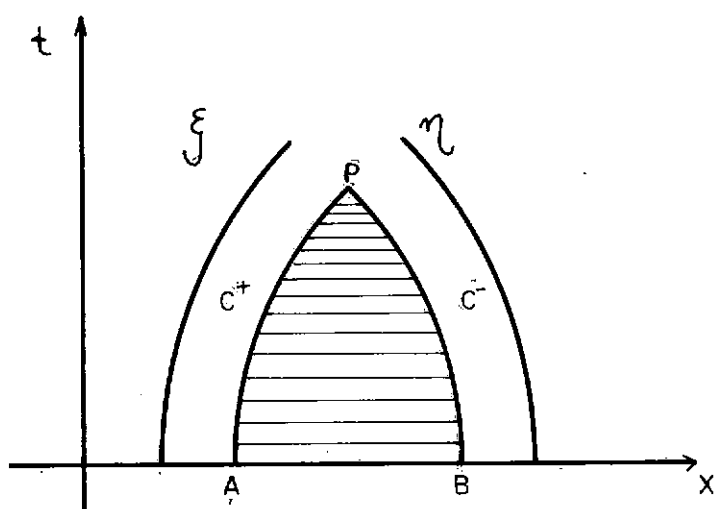


Figura 2.2 - Curvas características no plano  $x-t$ . Domínio de dependência da solução para um ponto qualquer  $P(x, t)$ .

Um dos procedimentos mais utilizados para a implementação numérica do método das características e consequente obtenção de solução aproximada para o sistema (2.11 - 2.12), consiste em dividir a região desejada do plano  $xt$  em uma malha característica, onde o sistema acima possa ser integrado [8]. Para isso utiliza-se o processo das diferenças finitas, onde as equações do sistema (2.11 - 2.12) tomam a forma:

$$c^+: c = \frac{\Delta x}{\Delta t} ; \quad \rho c \Delta V = \Delta S + \frac{\Delta A}{A} S$$

$$c^-: c = -\frac{\Delta x}{\Delta t} ; \quad \rho c \Delta V = -\Delta S - \frac{\Delta A}{A} S$$

A solução para o sistema acima utilizando as diferenças finitas será estudada na próxima seção.

Para especificar uma transformação (2.8) que forneça as curvas características obtidas em (2.10), ou seja:

$$\frac{\eta_x}{\eta_t} = - \frac{\xi_x}{\xi_t} = \frac{1}{c}$$

define-se as variáveis características como sendo:

$$\begin{aligned}\xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct\end{aligned}\tag{2.13}$$

A transformação (2.11) é regular, visto que  $c$  é constante e positivo, sendo o jacobiano (2.9):

$$J = \det \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \end{bmatrix} = 2c$$

diferente de zero em todos os pontos. A transformação inversa é dada por:

$$x = \frac{\xi + \eta}{2} \quad e \quad t = \frac{\eta - \xi}{2c}\tag{2.14}$$

A figura (2.3) mostra o domínio de dependência para a solução em um ponto qualquer  $P(\xi, \eta)$ , no plano das variáveis características.

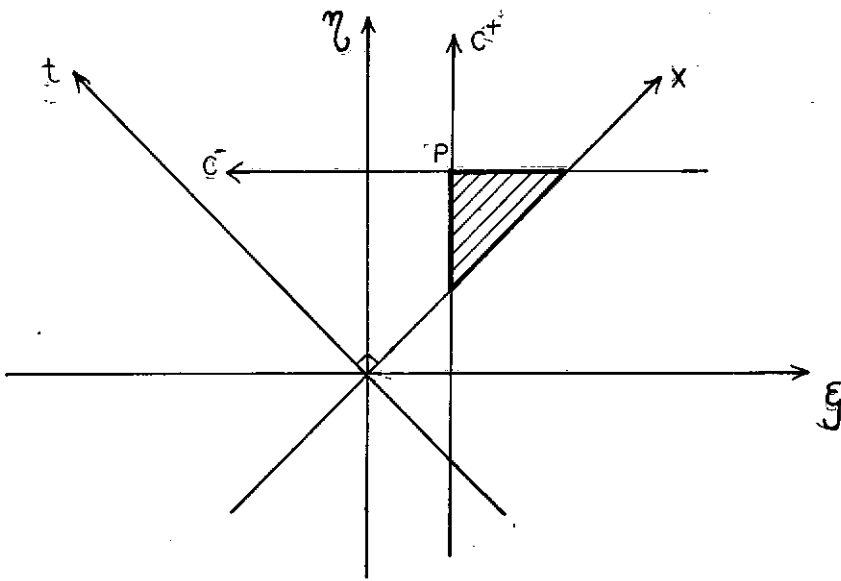


Figura 2.3 - Domínio de dependências da solução para o ponto P no plano das características.

Definindo  $U(\xi, \eta)$  e  $S(\xi, \eta)$  como o deslocamento e a tensão em função das variáveis características, a equação para a onda de deslocamento, (2.4), resulta na forma:

$$U_{\xi\eta} + \frac{(A_\eta + A_\xi)}{2A} (U_\xi + U_\eta) = 0 \quad (2.15)$$

obtida com o uso da transformação (2.13); com

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + U_\eta ;$$

$$u_t = U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = c(U_\eta - U_\xi)$$



para as derivadas de primeira ordem, e

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2 u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \quad ;$$

$$u_{tt} = c^2 (u_{\xi\xi} - 2 u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$$

para as derivadas de segunda ordem. Já para as ondas de tensão, tem-se, analogamente:

$$s_{\xi\eta} + \frac{A_\eta}{2A} \frac{A_\xi}{A} (s_\xi + s_\eta) + \left[ \frac{(A_{\xi\xi} + 2 A_{\xi\eta} + A_{\eta\eta}) A - A(A_\eta + A_\xi)^2}{A^2} \right] = 0 \quad (2.16)$$

As equações (2.15 - 2.16), cujas variáveis independentes são as variáveis características, são denominadas de forma normal. Para o sistema de primeira ordem, (2.6), tem-se:

$$(s_\eta - s_\xi) = \frac{E}{c} (v_\eta + v_\xi) \quad (2.17)$$

$$\rho c (v_\eta - v_\xi) = (s_\xi + s_\eta) + \frac{2(A_\xi + A_\eta)}{A} s$$

Observe-se que na equação (2.15) a influência da não homogeneidade na propagação de um pulso em barras de seção variável, se encontra caracterizada pelo termo  $A'/2A$ . Para uma barra homogênea com seção constante, a equação resulta em  $u_{\xi\eta} = 0$ , admitindo a solução geral:

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

ou ainda:

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Um aspecto importante a ser analisado, dentro da formulação característica, é o fenômeno de propagação quando em presença de descontinuidade no meio.

A propagação da descontinuidade eventualmente presente na frente de onda, através de uma variação brusca de seção transversal, foi abordada no capítulo anterior, seção 1.3, a partir das condições de equilíbrio e continuidade (1.14 - 1.25). Observa-se que tanto a onda de tensão como a de velocidade das partículas sofrem uma descontinuidade através do obstáculo sendo as condições de equilíbrio e continuidade mantidas pelo surgimento de uma onda refletida.

Considerando que a barra em questão possui parâmetros materiais contínuos, isto é,  $Z_1 = Z_2$ , ver figura (1.8), a refração (transmissão) e a reflexão são governadas respectivamente pelas equações:

$$\sigma_t = \frac{2 A_1}{A_1 + A_2} \sigma_i = (1 - r_{12}) \sigma_i \quad (2.18)$$

$$\sigma_r = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} \sigma_i = r_{12} \sigma_i \quad (2.19)$$

onde os índices  $i, r, t$  representam a incidência, reflexão e transmissão, respectivamente. Com a utilização da equação (1.10), as equações acima podem ser escritas em termos da velocidade, na forma:

$$v_t = \frac{2 A_1}{A_1 + A_2} v_i = (1 - r_{12}) v_i \quad (2.20)$$

$$v_r = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} v_i = r_{12} v_i \quad (2.21)$$

O coeficiente de reflexão  $r_{12}$  empregado nas expressões acima especifica completamente o que ocorre com as ondas ao passarem pela descontinuidade notando-se também que, tanto a onda refletida quanto a transmitida são cópias da incidente, apenas multiplicadas pelos coeficientes de reflexão  $r$  ou de transmissão  $(1 - r)$ .

Passando agora a examinar com mais detalhe os efeitos de refração e reflexão causados pela variação contínua de  $A(x)$ , nota-se que a questão é bem mais complexa. Ao cruzar cada elemento de barra  $dx$ , a onda sofre uma variação (refração) diferencial, emitindo uma correspondente onda diferencial refletida. A observação isolada desse efeito pode ser deduzida do caso anterior considerando-se uma única variação elementar de área.

Considere-se um pulso retangular incidindo em uma barra homogênea, cuja seção transversal varia bruscamente com relação a  $x$ , ver figura (2.4). Admitindo  $\sigma$  como sendo a tensão incidente (propagando-se na direção positiva de  $x$ ) na barra de área inicial  $A$  e que  $d\sigma$  é a variação da tensão através da descontinuidade  $dA$  existente na seção transversal, a partir da equação (2.18) vem que:

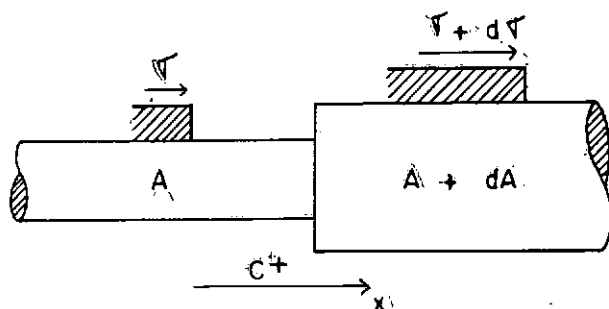


Figura 2.4 - Variação da tensão quando em presença de descontinuidade na seção transversal.

$$\sigma + d\sigma = \frac{2A}{2A + dA} \sigma$$

O efeito acumulativo dessas refrações elementares só pode ser calculado a priori para uma frente de onda descontínua. Uma frente de onda é uma superfície que se move mantendo constante uma variável característica ( $\xi$  ou  $\eta$ ). Para uma frente de onda propagando-se para a direita, tem-se  $x - ct = \text{cte}$ . Pode-se tomar como exemplo o pulso retangular citado acima, que é iniciado e encerrado por duas frentes de onda descontínuas, isto é, duas superfícies movendo-se com velocidade  $c$  que provocam com sua passagem, alterações finitas na velocidade e tensão.

Para uma frente de onda intermediária e não descontínua, acumula-se o efeito de refração, acrescido da integral das reflexões elementares da onda que a precede, por sua vez refratadas e re-refletidas continuamente. Esse efeito só pode ser computado pela solução completa das equações (2.4) e (2.5). Somente na frente de onda descontínua, o valor dos saltos  $|\sigma|$  e  $|v|$  não é afetado a não ser pela refração contí

nua. Este fato é facilmente compreendido considerando uma frente de onda simples (incidindo num meio em repouso) e é estendido às demais frentes de onda descontínua por superposição.

A equação de variação acima deduzida se aplica aos saltos na forma:

$$\frac{d|\sigma|}{|\sigma|} = -2 \frac{dA}{A}$$

ou, integrada

$$\frac{|\sigma|}{|\sigma_0|} = \sqrt{\frac{A_0}{A}} \quad (2.22)$$

Na equação acima  $|\sigma_0|$  e  $A_0$  representam os valores de  $|\sigma|$  e  $A$  para um ponto inicial  $x = x_0$ . Nota-se que a relação (2.20) engloba apenas o fenômeno da refração, tendo em vista que, a solução exata para as equações características se dá ao longo da frente de onda e consiste na primeira aproximação para a solução, atrás dela. A solução exata para os saltos através das frentes de onda descontínua, primeira aproximação para a solução total, é denominada de solução WKB (Wentzel - Kramers - Brillouin).

Procedendo de modo análogo com relação à velocidade das partículas, obtem-se a partir da equação (2.20), a equação da refração para  $|v|$  e  $A(x)$  na forma:

$$\frac{|v_0|}{|v|} = \sqrt{\frac{A}{A_0}} \quad (2.23)$$

Observa-se das relações (2.22 - 2.23) que no efeito da refração contínua através da frente de onda, em uma barra homogênea com seção variável, tanto a tensão  $|\sigma|$  como a velocidade  $|V|$  são governadas pelo parâmetro  $\sqrt{A(x)}$ .

Admitindo como novas variáveis dependentes  $\tilde{S}$  e  $\tilde{V}$  definidas como:

$$\tilde{S} = \sigma \sqrt{A} \quad \text{e} \quad \tilde{V} = v \sqrt{A} \quad (2.24)$$

onde  $\tilde{V} = \tilde{U}_t$ , as equações de movimento (2.4 - 2.5) incluindo a refração contínuas, são obtidas da substituição dos respectivos valores da tensão e velocidades, definidos em (2.24), resultando:

$$\tilde{U}_{tt} = c^2 \left[ \tilde{U}_{xx} + \tilde{U} \left( \frac{A'^2 - 2AA''}{4A^2} \right) \right] \quad (2.25)$$

e

$$\tilde{S}_{tt} = c^2 \left[ \tilde{S}_{xx} + \tilde{S} \left( \frac{2A''A - 3A'^2}{4A^2} \right) \right] \quad (2.26)$$

para as ondas de deslocamento e tensão, respectivamente. Observe-se que nas equações (2.25 - 2.26) a reflexão contínua é governada por derivadas de 2ª ordem com relação à área de seção transversal  $A$ .

Também as equações acima podem ser representadas por um sistema de primeira ordem, sistema (2.6), o qual em termos das novas variáveis dependentes, fica:

$$\tilde{S}_t = E(\tilde{V}_x - \tilde{V} \frac{A'}{2A}) \quad (2.27)$$

$$\rho \tilde{V}_t = \tilde{S}_x + \tilde{S} \frac{A'}{2A}.$$

Aplicando a formulação característica à refração contínua, o sistema de equações de primeira ordem assume a forma:

$$\xi = \text{cte}$$

$$c^+ : c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.28)$$

$$\rho c \tilde{V}_\eta = \tilde{S}_\eta + (\tilde{S} + \tilde{V}) \frac{A'}{4A}$$

$$\eta = \text{cte}$$

$$c^- : c = - \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.29)$$

$$\rho c \tilde{V}_\xi = - \tilde{S}_\xi - (\tilde{S} + \tilde{V}) \frac{A'}{4A}$$

Dentro do estudo de propagação em meio unidimensional não homogêneo, um fato importante a ser discutido consiste na decomposição da tensão, da região de não homogeneidade em suas parcelas  $c^+$  e  $c^-$ . Para isso considere-se o problema de impacto em barra semi-infinita, seção 1.2, cuja intensidade da tensão originada da interface de impacto é de  $|\sigma| = pcv$ . As novas variáveis são definidas como sendo:

$$\phi = \frac{\sigma + \rho c v}{2} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{\sigma - \rho c v}{2} \quad (2.30)$$

com  $\phi$  apresentando a parcela da tensão que se desloca para a direita e  $\psi$  a parcela que se desloca para a esquerda.

O sistema (2.6), que governa o problema de propagação em meio unidimensional não homogêneo, pode ser escrito na forma:

$$\sigma_t \pm \rho c v_t = E v_x \pm c \sigma_x \pm c \frac{A'}{A} \sigma$$

ou ainda:

$$\sigma_t + \rho c v_t = c \left[ \frac{E}{c} v_x + \sigma_x \right] + c \frac{A'}{A} \sigma \quad (2.31)$$

$$\sigma_t - \rho c v_t = c \left[ \frac{E}{c} v_x - \sigma_x \right] - c \frac{A'}{A} \sigma$$

Com a utilização das novas variáveis, (2.30), o sistema acima assume a forma:

$$\phi_t = c \phi_x + c \frac{A'}{2A} (\phi + \psi) \quad (2.32)$$

$$\psi_t = -c \psi_x - c \frac{A'}{2A} (\phi + \psi)$$

Para as variáveis características definidas em (2.13), o sistema (2.32) passa a ser integrável sob a forma:

$$\phi_\xi = - \frac{A'}{4A} (\phi + \psi) \quad (2.33)$$

$$\psi_\eta = - \frac{A'}{4A} (\phi + \psi)$$



Observe-se no sistema acima que para a parcela  $\phi$  da tensão propagando-se na direção da características  $\xi$ ,  $c^+$ , verifica-se a presença da parcela  $\psi$  (referente ao pulso refletido), junto ao termo de caracterização da não homogeneidade. O mesmo efeito de acoplamento acontece com relação a parcela  $\psi$  da tensão propagando-se na direção da característica  $\eta$ .

Para uma melhor visualização da análise discutida acima, considere-se agora o problema incluindo implicitamente a refração contínua, definida em (2.22 - 2.23). Para as novas variáveis  $\Phi$  e  $\Psi$  a refração contínua define-se:

$$\Phi = \phi \sqrt{A} \quad \text{e} \quad \Psi = \psi \sqrt{A} \quad (2.34)$$

Com a substituição das variáveis acima, o sistema (2.32) fornece:

$$\Phi_t = c \Phi_x + c \frac{A'}{2A} \Psi \quad (2.35)$$

$$\Psi_t = -c \Psi_x - c \frac{A'}{2A} \Phi$$

Com o emprego das variáveis características  $\xi$  e  $\eta$ , o sistema acima assume a forma:

$$\Phi_\xi = - \frac{A'}{4A} \Psi \quad (2.36)$$

$$\Psi_\eta = - \frac{A'}{4A} \Phi$$

Observe-se no sistema (2.36) a presença isolada da parcela  $\Psi$  da tensão na propagação de  $\Phi$  na direção  $\xi$ , bem como a presença de  $\Phi$  na propagação  $\Psi$  na direção  $\eta$ , uma vez que a refração contínua encontra-se incluída no equacionamento. Agora, o efeito explícito da não homogeneidade se reduz à reflexão.

### 2.3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para o problema de propagação envolvendo duas equações hiperbólicas de primeira ordem, a duas variáveis independentes, o método de integração ao longo das características, é usualmente o processo mais conveniente e preciso. Se as equações não apresentam grande complexidade e conhecendo-se o comportamento das soluções, pode-se desde já fazer uso do processo de diferenças finitas, desde que, as limitações impostas pelas características sejam consideradas no seu desenvolvimento [9]. Nesta seção, a solução numérica para o caso de um pulso inicial arbitrário propagando-se em uma barra fina de seção transversal variável, será obtida pelo processo de diferenças finitas.

Como foi visto na seção anterior, a solução para o sistema característico (2.11 - 2.12), consiste na divisão do plano  $xt$  em uma malha característica retilínea. No interior desta malha, a região de variação de seção encontra-se dividida em  $N$  intervalos de comprimento  $\Delta x$ , ver figura 2.5, onde o passo no tempo é  $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ . A equação (2.11-a) resulta em uma diagonal de inclinação positiva no interior da malha, descrita pela linha AP. Logo a partir das condições



Aplicando o processo de diferenças finitas para o sistema em questão, obtem-se para  $S_{i,j+1} = S(x_i, t_{j+1})$  a expressão:

$$S_{i,j+1} = S_p(i-1,j) + S_r(i+1,j) \quad (2.37)$$

com:

$$S_p(i-1,j) = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{A_i - A_{i-1}}{A_{i-1}}\right) S_{i-1,j} - Z v_{i-1,j} \right] \quad (2.38)$$

$$S_r(i+1,j) = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{A_i - A_{i+1}}{A_{i+1}}\right) S_{i+1,j} + Z v_{i+1,j} \right]$$

onde  $Z$  é a impedância do material definida por  $\rho C$ .

De maneira análogo procede-se com relação à velocidade, isto é:

$$v_{i,j+1} = v_p(i-1,j) + v_r(i+1,j) \quad (2.39)$$

com

$$v_p(i-1,j) = \frac{1}{2} \left[ v_{i-1,j} - \left(1 - \frac{A_i - A_{i-1}}{A_{i-1}}\right) S_{i-1,j}/Z \right] \quad (2.40)$$

$$v_r(i+1,j) = \frac{1}{2} \left[ v_{i+1,j} + \left(1 - \frac{A_i - A_{i+1}}{A_{i+1}}\right) S_{i+1,j}/Z \right]$$

As expressões acima fornecem soluções para  $j > 1$  e  $1 < i < N + 1$ , sendo  $N$  o número de intervalos em que foi dividida a região de descontinuidade.

As condições iniciais e de contorno imposta ao problema, são descritas como segue:

- i - Para  $j = 1$  (condições iniciais) pode ser adotada qualquer distribuição de tensões e velocidades. A prescrição de um pulso inicial propagando-se para a direita é estabelecida quando prevalece entre tensões e velocidades iniciais a relação

$$\sigma_{i,1} = -Z v_{i,1}$$

Alternativamente, pode-se evitar a necessidade de um longo suporte inicial para o pulso, injetando-o via condição de contorno, como a seguir.

- ii - Para  $i = 1$ , supondo-se que à esquerda o meio é homogêneo (barra uniforme) a onda incidente  $S_p$ , com velocidade de partícula  $V_p = S_p/Z$  pode ser prescrita arbitrariamente.

Aqui, os valores de  $S_r$  e  $V_r$ , obtidos com a integração numérica, fornecem uma aproximação para a onda refletida pelo meio à direita.

- iii - Para  $i = NP + 1$  (contorno final da região na homogênea) tem-se que a onda refletida  $S_r$  é identicamente nula, enquanto que,  $S_p(N,j)$  é a onda transmitida após o obstáculo.

Os valores para a tensão e velocidade em todos os pontos da região de não homogeneidade, no plano  $xt$ , foram determinados através de um programa computacional, figura 2.6, escrito em linguagem FORTRAN. A variação da seção transversal da barra, neste exemplo é dada na forma:

$$A(x) = \frac{\pi D(x)^2}{4} \quad (2.41)$$

onde

$$D(x) = \frac{(D + d)}{2} + \frac{(D - d)}{2} \cos \left[ \frac{2\pi(x - 1)}{L} \right] \quad (2.42)$$

sendo  $L$  o comprimento do obstáculo,  $D$  e  $d$  os diâmetros máximo e mínimo da barra, respectivamente.

Observe-se no programa computacional que as funções  $SPRO$  e  $VPRO$  (onda progressiva),  $SREG$  e  $VREG$  (onda regressiva) relacionadas com os contornos inicial e final da região não homogênea, obstáculo, estão, respectivamente, relacionadas as parcelas  $\phi$  e  $\psi$  descritas na seção anterior. A não utilização das relações em que se define a refração contínua na formulação destas funções, se deve ao fato de que as ondas são tratadas fora da região em que  $A$  varia com  $x$ , ou seja, em pontos onde a barra se apresenta uniforme.

Na análise de convergência para o programa elaborado acima, utilizou-se como critério, a conservação da energia elástica total do sistema. Sabendo-se que a energia total do sistema é dada pela soma das energias potencial de de-

formação e cinética [10], para um meio unidimensional tem-se:

$$E = \int_0^L \left( \frac{1}{2E} \right) \sigma^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 A(x) dx$$

Logo o balanço de energia, para este caso, consiste na igualdade da energia total incidente ã soma das energias totais refletida e transmitida. A utilização deste processo resultou em convergência de 97% calculada com a inclusão de todos os pontos em que a amplitude da onda permanece significativa.

Todo o processo discutido acima, para o problema de propagação em barras de seção variável, torna-se simplificado quando a barra apresenta uma variação de seção brusca, degrau, cuja solução numérica é obtida do uso direto das equações (1.24 - 1.25). No entanto os resultados experimentais divergem bastantes dos teóricos quando a variação brusca de seção é muito acentuada.

Os resultados obtidos pelo programa computacional, bem como, da utilização direta das fórmulas (1.24 - 1.25) são apresentados em gráficos nos próximos capítulos.

```

C      CALCULO DAS TENSOES E VELOCIDADES EM UMA BARRA
C      CILINDRICA COM SECAO TRANSVERSAL VARIAVEL
      DIMENSION A(125),SINC(4000),VINC(4000),SREF(4000),VREF(4000)
)
      DIMENSION SPRO(125), VPRO(125), SREG(125), VREG(125)
      DIMENSION STRAN(4000),VTRAN(4000)
      COMMON DAE(125), DAD(125), S(125), V(125), Z
      READ(5,100)G,C,N,NT,NI,ND,NF
      READ(5,101)(A(I),I=1,122)
      READ(5,102)(SINC(J),J=1,ND,100)
C      INICIALIZACAO
C      IMPEDANCIA MECANICA
      Z=G*C
C      MODULO DE ELASTICIDADE
      E=G*C**2
C      ONDA INCIDENTE ORIGINADA DO IMPACTO DE UM PROJETIL DE ALUMI
N10
C      COM COMPRIMENTO L MILIMETROS
      DO 10 J=1,ND,100
      X=(SINC(J+100)-SINC(J))/100.
      DO 5 K=1,99
      SINC(K+J)=SINC(J)+X*K
5  CONTINUE
10  CONTINUE
      DO 12 J=1,ND
      VINC(J)=-SINC(J)/Z
12  CONTINUE
      ND1=ND+1
      DO 15 J=ND1,NT
      SINC(J)=0.
      VINC(J)=0.
15  CONTINUE
      NP1=N+1
      DO 20 I=1,NP1
      S(I)=0.
      V(I)=0.
20  CONTINUE
      I=1
      DAD(I)=1-((A(I)-A(I+1))/A(I+1))
      I=NP1

```



```

      DAE(I)=1-((A(I)-A(I-1))/A(I-1))
      DO 30 I=2,N
      DAE(I)=1-((A(I)-A(I-1))/A(I-1))
30    DAD(I)=1-((A(I)-A(I+1))/A(I+1))
      DO 50 J=2,NT
C     ONDA PROGRESSIVA
      SPRO(1)=SINC(J)
      VPRO(1)=VINC(J)
C     ONDA REGRESSIVA
      SREG(1)=SR(1)
      VREG(1)=VR(1)
C     ONDA REFLETIDA
      SREF(J)=SREG(1)
      VREF(J)=VREG(1)
      DO 40 I=2,N
C     PONTOS INTERNOS
      SREG(I)=SR(I)
      VREG(I)=VR(I)
      SPRO(I)=SP(I)
      VPRO(I)=VP(I)
40    CONTINUE
C     ONDA TRANSMITIDA
      SPRO(NP1)=SP(NP1)
      VPRO(NP1)=VP(NP1)
      STRAN(J)=SPRO(NP1)
      VTRAN(J)=VPRO(NP1)
      SREG(NP1)=0.
      VREG(NP1)=0.
      DO 45 I=1,NP1
      S(I)=SREG(I)+SPRO(I)
      V(I)=VREG(I)+VPRO(I)
45    CONTINUE
50    CONTINUE
C     CALCULO DOS SOMATORIOS DAS TENSOES E VELOCIDADES INCIDENTES
/
C     REFLETIDAS E TRANSMITIDAS
      SSINC=0.
      SVINC=0.
      SSREF=0.
      SVREF=0.

```

```

SSTRAN=0.
SVTRAN=0.
DO 60 J=1,NT
SSINC=SSINC+SINC(J)**2
SVINC=SVINC+VINC(J)**2
SSREF=SSREF+SREF(J)**2
SVREF=SVREF+VREF(J)**2
SSTRAN=SSTRAN+STRAN(J)**2
SVTRAN=SVTRAN+VTRAN(J)**2
60 CONTINUE
C  CALCULO DAS ENERGIAS INCIDENTE, REFLETIDA E TRANSMITIDA
EINC=((0.5/E)*SSINC+0.5*G*SVINC)*(0.5*A(1))/10**9
EREF=((0.5/E)*SSREF+0.5*G*SVREF)*(0.5*A(1))/10**9
ETRAN=((0.5/E)*SSTRAN+0.5*G*SVTRAN)*(0.5*A(NP1))/10**9
WRITE(6,200)(J,SREF(J),J,VREF(J),J=1,NF,NI)
WRITE(6,201)(J,STRAN(J),J,VTRAN(J),J=1,NF,NI)
WRITE(6,202)EINC,EREF,ETRAN
100 FORMAT(I4,X,I4,X,I3,X,I4,X,I2,X,I3,X,I4)
101 FORMAT(9F8.4)
102 FORMAT(8F7.3)
200 FORMAT(3X,'SREF(''IS'')=',E14.6,20X,'VREF(''IS'')=',E14.6,/)
201 FORMAT(3X,'STRAN(''IS'')=',E14.6,20X,'VTRAN(''IS'')=',E14.6,/)
202 FORMAT(3X,'EINC=',E14.6,10X,'EREF=',E14.6,10X,'ETRAN=',E14.
6)
STOP
END
FUNCTION SR(I)
COMMON X(125),D(125),S(125),V(125), Z
SR=0.5*(D(I)*S(I+1)+Z*V(I+1))
RETURN
END
FUNCTION SP(I)
COMMON D(125),X(125),S(125),V(125), Z
SP=0.5*(D(I)*S(I-1)-Z*V(I-1))
RETURN
END
FUNCTION VR(I)
COMMON X(125),D(125),S(125),V(125), Z
VR=0.5*(V(I+1)+D(I)*S(I+1)/Z)
RETURN

```

```
END  
FUNCTION VP(I)  
COMMON D(125),X(125),S(125),V(125), Z  
VP=0.5*(V(I-1)+D(I)*S(I-1)/Z)  
RETURN  
END
```

Figura 2.6 - Programa básico para a solução da propagação de pulsos em uma barra de seção transversal variável.

CAPÍTULO III

### 3 - EXPERIMENTOS

#### 3.1 - DESCRIÇÃO DOS EXPERIMENTOS

Um experimento inicial de propagação de pulsos em barras foi conduzido com o objetivo de verificar as limitações da teoria unidimensional e estabelecer técnicas de experimentação que possibilitem o estudo de novos aspectos relacionados com a propagação de ondas. Foi estudada experimentalmente a propagação de pulsos e sua filtragem em barras com seção variável em uma pequena região, cujo comprimento é inferior a uma dezena de diâmetros da barra. Para tais obstáculos curtos, é esperada a maior discrepância entre teoria e experimento.

O experimento de propagação utiliza uma barra de alumínio cilíndrica de 2 metros de comprimento com 12.6 mm de diâmetro. A variação de seção transversal, centralmente localizada, tem comprimento de 60 mm. Essa variação foi obtida por usinagem e medida com precisão (0.001 mm) por intermédio de um projetor de perfil, utilizando-se intervalos de deslocamentos de 0.5 mm. Uma aproximação para essa variação, encontra-se prescrita na curva cosenoidal (2.41). A figura 3.1 compara a variação cosenoidal com a realmente obtida.

A barra encontra-se apoiada em mancais de Teflon, apresentando uma extremidade livre e a outra amortecida por meio de um anteparo fixo de material viscoelástico. Um esquema do experimento de propagação é apresentado na figura 3.2.

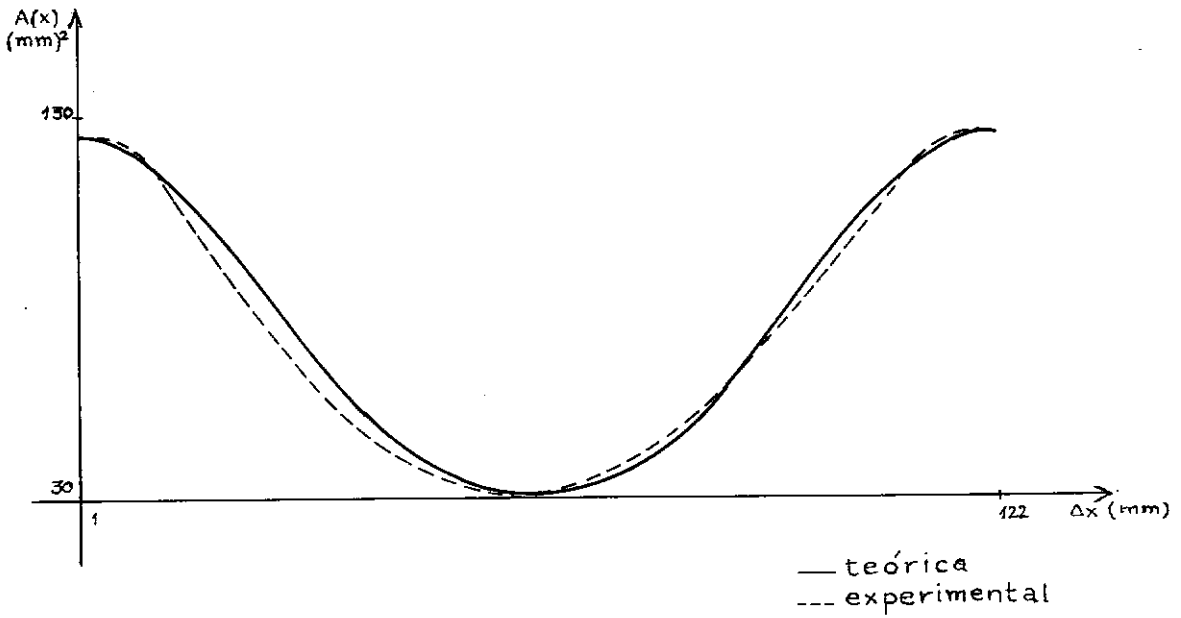


Figura 3.1 - Variação de seção transversal - curvas teórica e experimental.

Para a medida dos pulsos incidente, refletido e transmitido utilizou-se extensômetros elétricos (strain-gages) de comprimento 0.3 mm, marca KYOWA, tipo KFC-03-C1-aa Gage-Factor de 2.04 e resistência de  $120.2\Omega$ , com um par de extensômetros diametralmente opostos, cementados à barra. As estações foram localizadas a 500 mm de cada extremidade, na direção axial. Os extensômetros localizados a 500 mm da extremidade livre registram a passagem dos pulsos incidente e refletido, enquanto os extensômetros a 500 mm da extremidade amortecida registram a passagem do pulso transmitido.

A obtenção dos dados se dá através de fotografias da tela do osciloscópio (Tektronix, 564B), ao qual se encontram conectadas as duas pontes de strain-gages, figura 3.3, cujo trigger é disparado por uma ponte deletora, localizada a 200 mm da extremidade livre.

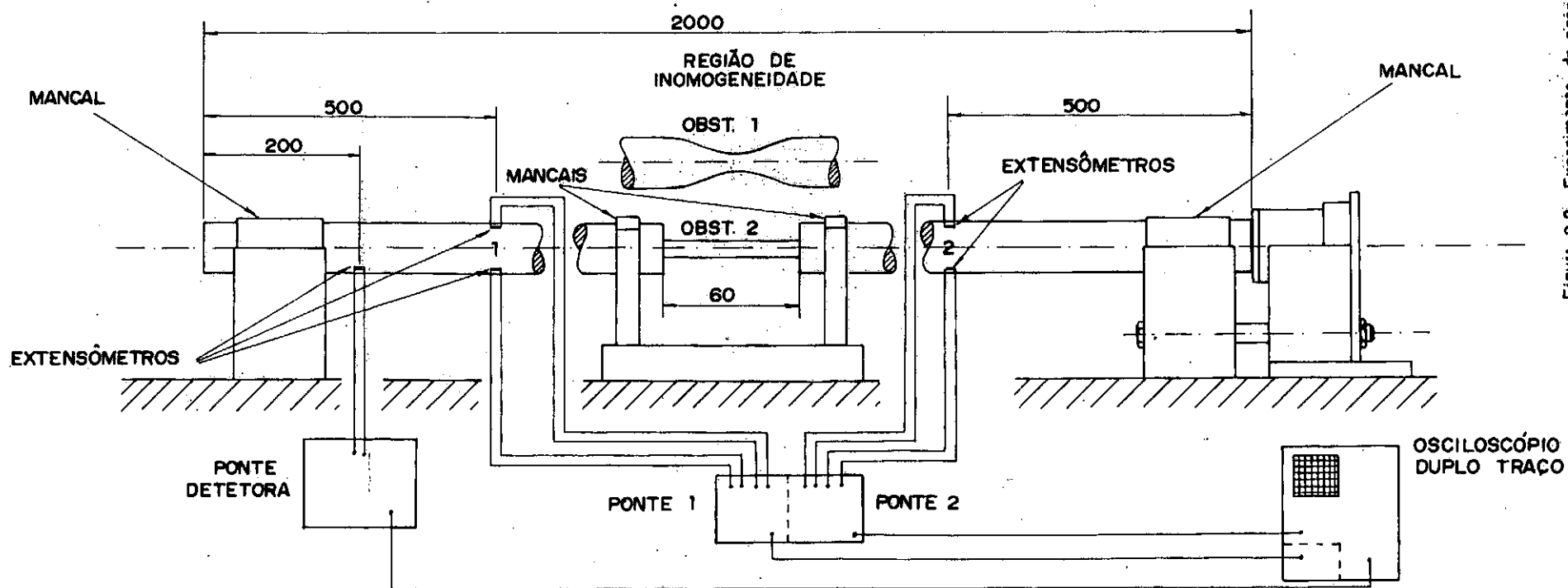
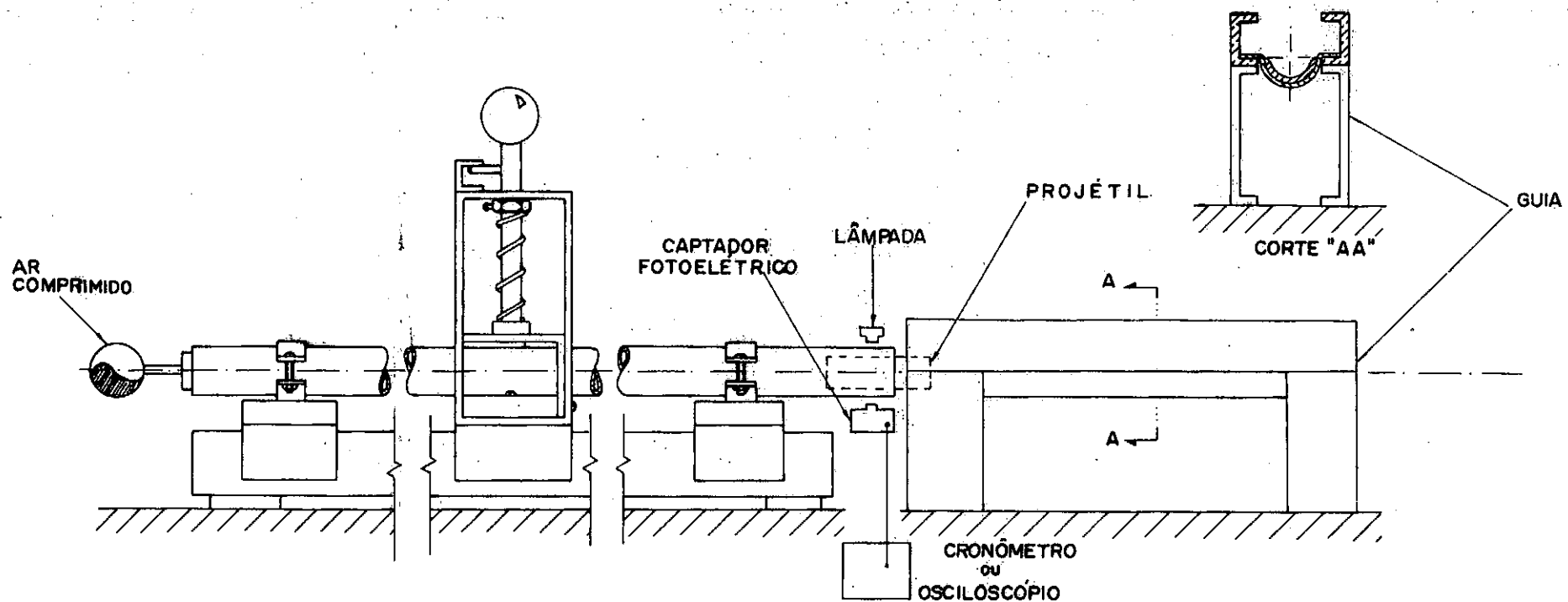


Figura 3.2 - Experimento de propagação para barras de seção transversal variável

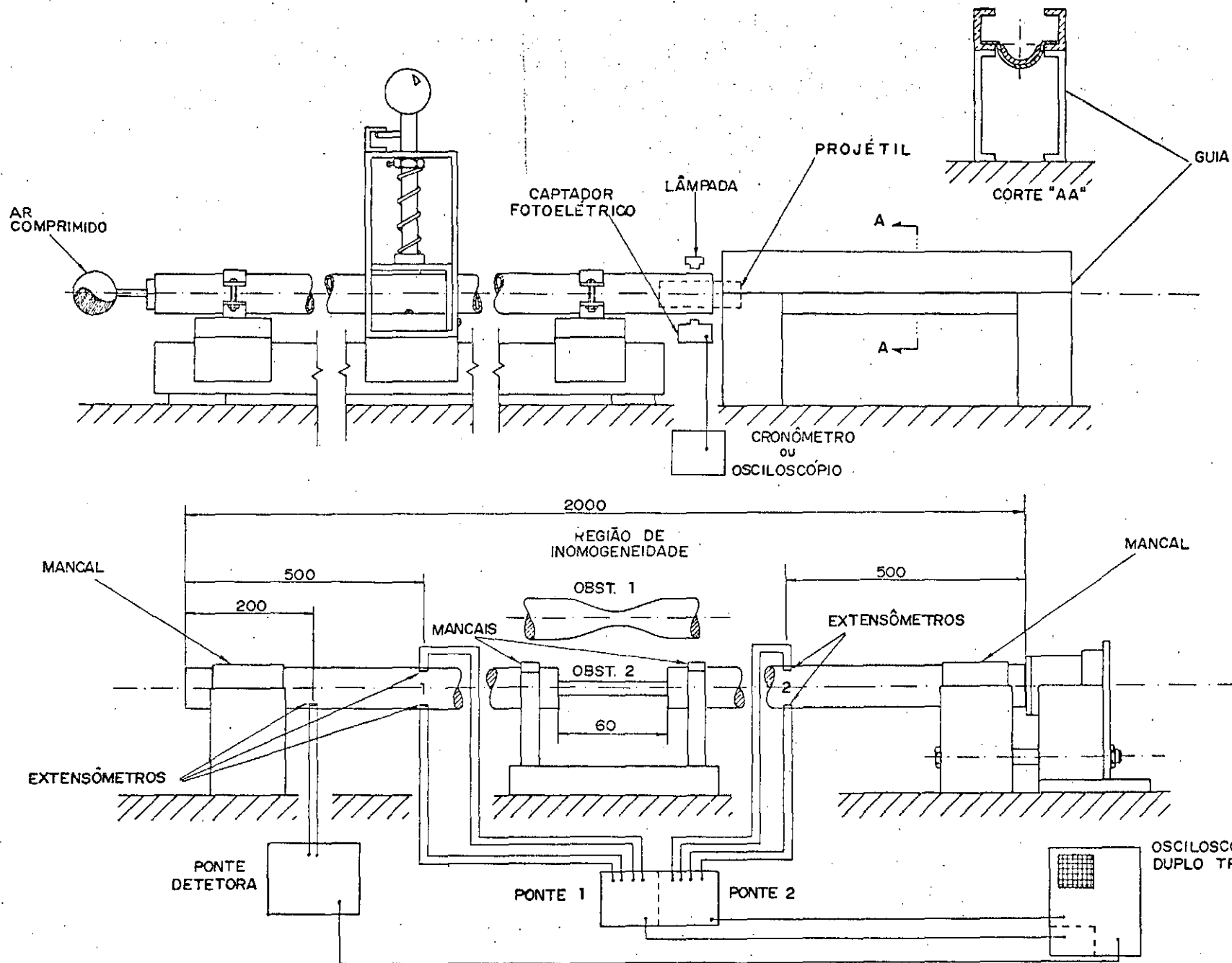


Figura 3.2 - Experimento de propagação para barras de seção transversal variável



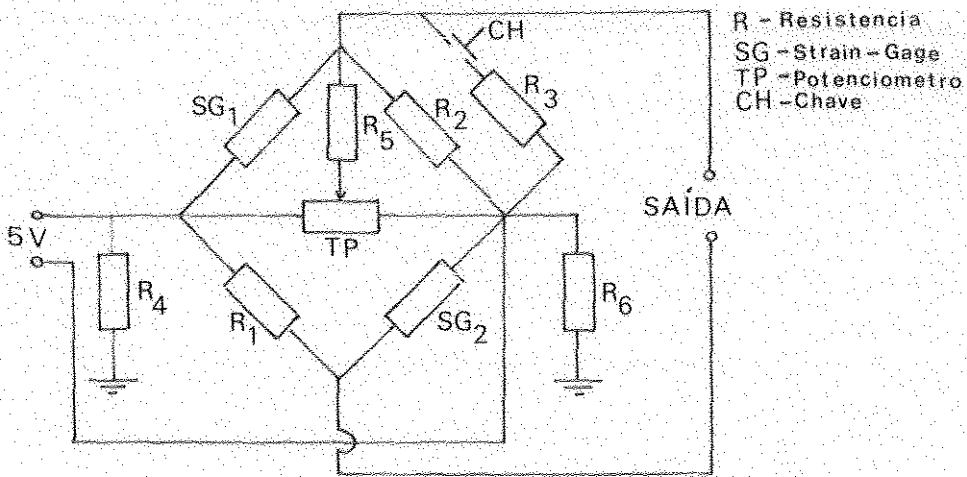


Figura 3.3 - Esquema da Ponte de Wheatstone

Após os resultados obtidos para a variação de seção descrita anteriormente e ilustrada na figura 3.4, nova experiência foi realizada para um obstáculo brusco, com 2 graus, de mesmo comprimento do obstáculo suave e de diâmetro igual a 6.3 mm.

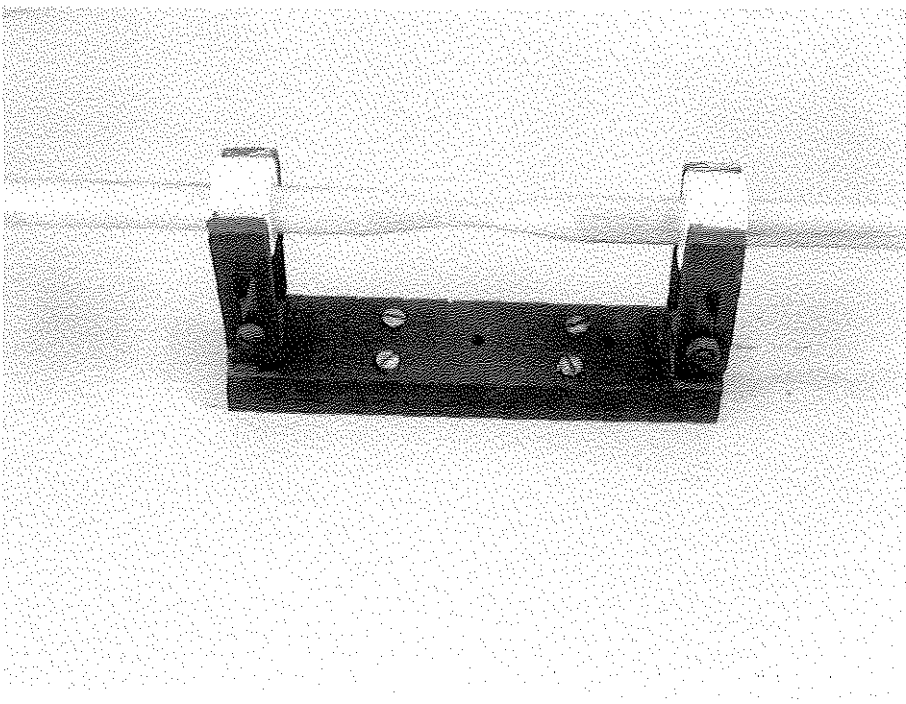


Figura 3.4 - Variação suave de seção transversal.

Para a geração do pulso incidente, utilizou-se um dispositivo de impacto constituído de um tubo de PVC, diâmetro interno de 15 mm e comprimento 1 metro, ao qual se encontra acoplado um compressor de ar. Este dispositivo, apoiado também sobre mancais e colinear com a barra, tem como objetivo o disparo de projéteis. Os dispositivos agregados para o seu funcionamento são descritos simplifadamente a seguir:

- 1 - Um gatilho disparador, situado a 400 mm da extremidade esquerda, ver esquema experimental, para o qual foi adotado um sistema pino-mola. O pino, ao penetrar no tubo, tem a função de reter o projétil para acúmulo de pressão. O sistema pino-mola bem como um dos projéteis utilizados nas experiências, são mostrados na figura 3.5.

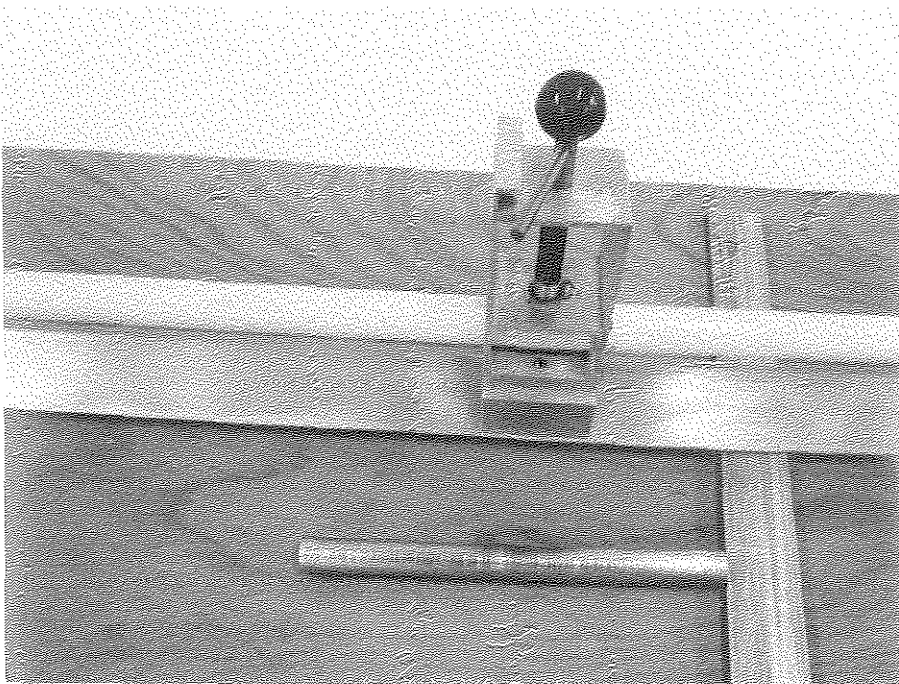


Figura 3.5 - Gatilho disparador no dispositivo de impacto.

II- Na extremidade livre do tubo é conectado um captador fotoelétrico, ver figura 3.6, cuja finalidade consiste na medição da velocidade de impacto do projétil.

Este captador foi introduzido na experiência após um primeiro teste, tendo em vista a destruição das pontes de strain-gage, na utilização de um impacto muito forte, possibilitou o cálculo de uma faixa de variação da velocidade de impacto, apenas necessária à obtenção do sinal, evitando assim, possíveis avarias na instrumentação ou ruptura do material da barra.

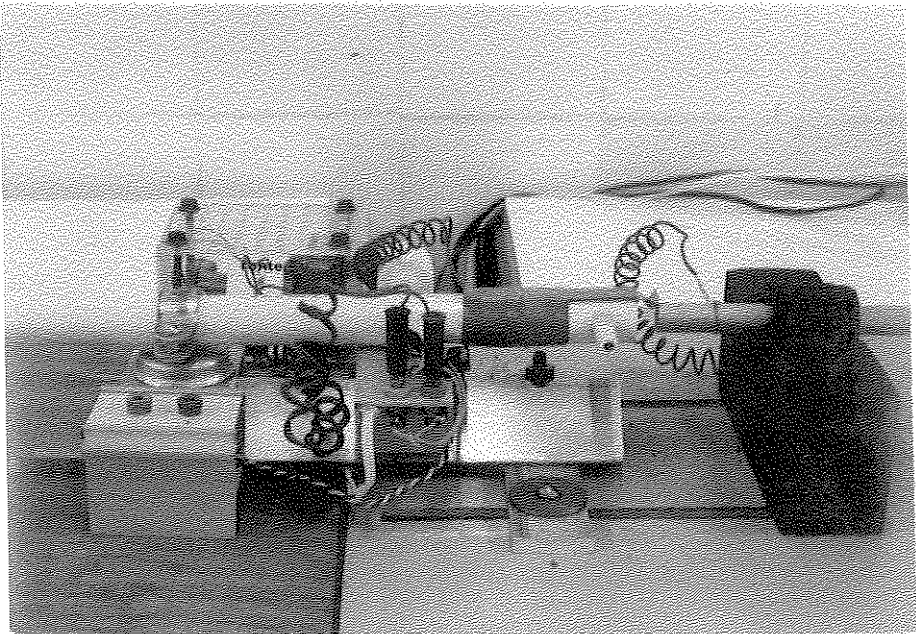


Figura 3.6 - Captador fotoelétrico para medição da velocidade de impacto.

As velocidades máxima e mínima de impacto utilizadas na experiência foram de 14 m/s e 4 m/s, respectivamente. Uma vez que o captador fotoelétrico não foi utilizado durante a experiência, a faixa de velocidade admitida, foi assegurada pela pressão exercida no projétil antes do impacto.

III - Entre a barra e o dispositivo de impacto, adaptou-se uma guia de PVC, com 195 mm de comprimento, ver figura 3.7, colinear com a barra, permitindo a passagem livre do projêtil e evitando assim a influência da pressão exercida pelo ar comprimido, no momento do impacto.

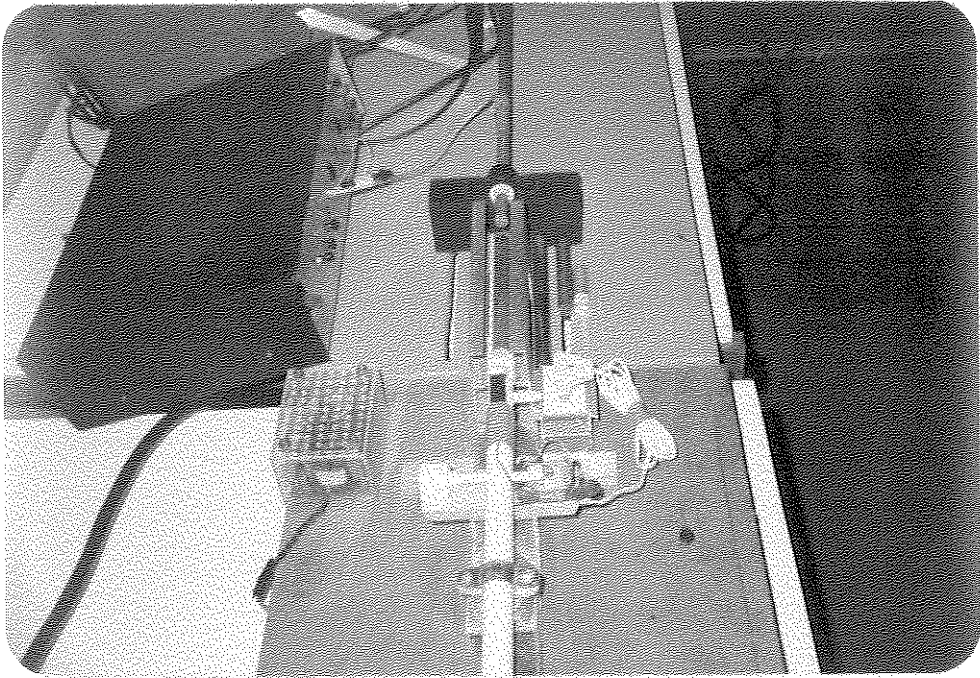


Figura 3.7 - Guia para passagem livre do projêtil no dispositivo de impacto.

Os resultados experimentais obtidos no impacto de diversos projêteis, para as variações suave e brusca da seção transversal, são descritos e analisados nas próximas seções.

### 3.2 - UTILIZAÇÃO DE PROJÉTIL LONGO

Os resultados aqui apresentados foram obtidos a partir de fotografias da tela do osciloscópio e plotados em gráficos de  $\text{deformação} \times \text{tempo}$  para melhor visualização e interpretação. A deformação medida corresponde à tensão com base no modelo elástico. As curvas experimentais serão aqui tratadas com a variável tensão. Embora as medidas sejam efetuadas na superfície da barra, a hipótese de uniformidade de tensões na seção transversal, (ver seção 2.1), válida a partir de uma dezena de diâmetros de distância das regiões de impacto e outros acidentes, será aqui aplicada.

A primeira parte da experiência consiste no impacto longitudinal de um projétil cilíndrico de alumínio, longo, de comprimento 150 mm e diâmetro igual a 12.6 mm. De acordo com a teoria de impacto desenvolvida nas seções 1.2-1.3, pulsos longitudinais de compressão são originados na interface comum de impacto, propagando-se ao longo da barra e do projétil com mesma intensidade mas em sentidos opostos. Teoricamente, a duração do impacto, bem como o tempo de propagação do pulso incidente é de  $60 \mu\text{s}$ , correspondendo assim a tempo de ida e volta do pulso no projétil. A presença de descontinuidade na barra, caracterizada pela variação de seção transversal, produz efeitos de reflexão e transmissão na propagação do pulso durante a sua passagem através do obstáculo.

As figuras 3.8 e 3.9 mostram o resultado da experiência realizada para o caso em que a barra apresenta uma variação suave de seção transversal.

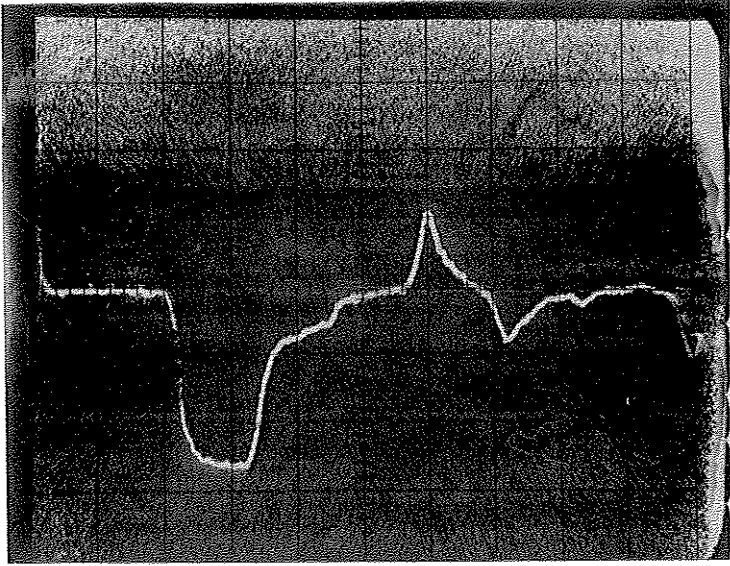


Figura 3.8 - Pulsos incidente e refletido no obstáculo suave  
ESTAÇÃO 1.

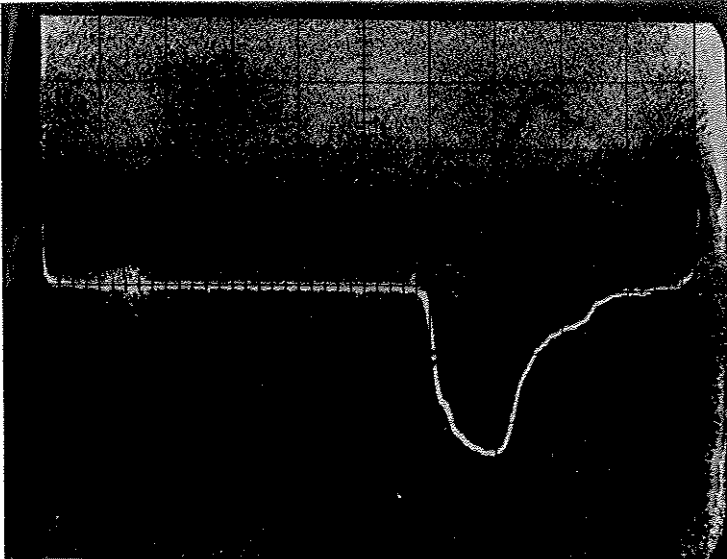


Figura 3.9 - Pulso transmitido no obstáculo suave - ESTAÇÃO 2.

Uma vez que este tipo de carregamento produz em pulso de compressão de duração e amplitude definidas as escalas adequadas de tempo e amplitude para os pulsos de deformação das figuras 3.8 e 3.9 consistem em  $50 \mu s$  por divisão na escala de tempo (horizontal) e amplitudes de 0.01 Volts por divisão na escala de voltagem de saída (vertical). Sendo a barra e o projêtil constituídos do mesmo material, a amplitude do pulso de deformação é dada por  $\bar{\epsilon} = \frac{V}{2c}$ , onde  $V$  é a velocidade de impacto do projêtil e  $c$  a velocidade de propagação da onda em ambas [11]. As mesmas escalas são utilizadas na figura 3.10 a qual apresenta os efeitos de reflexão e transmissão do pulso incidente de compressão, para o mesmo tipo de impacto, quando em presença de variação brusca de seção transversal.

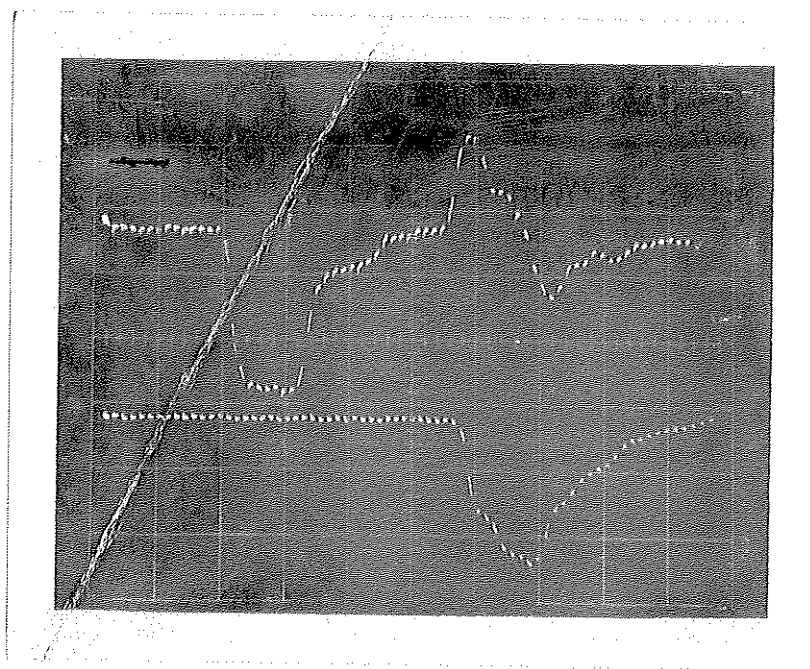


Figura 3.10 - Obstáculo brusco.

ESTAÇÃO 1: Pulsos incidente e refletido

ESTAÇÃO 2: Pulso transmitido

A interpretação dos resultados obtidos ilustrados nas figuras 3.8 , 3.9 e 3.10, baseia-se fundamentalmente na teoria clássica de impacto longitudinal entre barras cilíndricas, levando-se em conta a impossibilidade de se obter na prática um impacto perfeito. Teoricamente, a obtenção de um pulso retangular na colisão de duas barras, se deve ao fato de que, sendo as interfaces de impacto consideradas perfeitamente planas todas as partículas colidem simultaneamente adquirindo assim velocidade idênticas, fazendo com que a frente de onda gerada na interface de impacto seja perfeitamente plana. Experimentalmente tendo em vista a dificuldade de se obter em experiências de laboratório superfícies perfeitamente planas e perfeita colinearidade, a forma do pulso gerada no impacto seria de um pulso retangular "defeituoso" [12]. Isto se deve à existência de um atraso de tempo na formação da frente de onda, tempo este necessário à correção das imperfeições das superfícies de contato, tais como, rugosidade e não planaridade, sendo que, esta correção se dá em termos da deformação das superfícies de impacto, necessária a colisão de todas as suas partículas.

Observando-se os pulsos incidentes de compressão nas figuras (3.8) e (3.10), verifica-se um atraso de tempo, na formação da frente de onda, de cerca de  $20 \mu s$ . Este atraso de tempo é caracterizado pela inclinação do traço e um arredondamento do pulso retangular. Além das imperfeições registradas nas superfícies de contato, um fator importante e de grande influência na deformação do pulso incidente, consiste no desalinhamento existente entre o projétil e a barra no momento da colisão. Todo o estudo, relacionado com as dificult



dades encontradas em um impacto experimental, é atribuído a SEARS, o qual toma como uma boa aproximação para o impacto gerado entre barras cilíndricas de extremidades planas, o estudo teórico referente ao impacto de barras, cujas extremidades de contato apresentam uma ligeira curvatura [13]. Este estudo baseia-se fundamentalmente na análise pontual da distribuição de tensão nas superfícies em contato. Estudos experimentais foram realizados para verificação da teoria citada acima, onde a rugosidade e a não planaridade presentes nas extremidades de contato, entre projétil e barra, são substituída pela adoção de extremidades esféricas de raio definido. Com base na análise do processo de variação da tensão durante o impacto, uma interpretação detalhada dos pulsos incidentes obtidas a partir deste tipo de colisão foi efetuada [14].

Durante a colisão entre duas barras de comprimentos finitos, a onda de compressão crescerá da maneira descrita na seção 1.2, até o retorno da onda, agora de tração, refletida na extremidade livre da barra, correspondendo ao tempo  $2l/c$  após ao primeiro contato. A onda inicial agora retorna à extremidade (esférica) ao mesmo tempo em que a compressão começa a decrescer. Supondo um contato perfeito entre as superfícies, a tendência do pulso de tração seria de atravessar integralmente o contorno entre os dois meios, e passar a percorrer o interior da outra barra [15]. Tendo em vista a não totalidade do contato, uma vez que o mesmo se dá entre extremidades esféricas, a propagação do pulso através das mesmas, apresenta aspectos bem mais complicados. Isto se deve ao fato de que a reflexão da onda na interface entre dois meios é governada pelas condições de contorno, onde a soma de todas

as variações que a onda sofre pode ser expressada pela variação da amplitude juntamente com a variação de fase [16]. Quanto à transmissão do pulso através das interfaces, esta se dá apenas parcialmente uma vez que só uma pequena parcela das extremidades se encontram em contato, fazendo com que parte da energia a ser transmitida retorne ao interior da barra. Esta nova reflexão se dá de forma desordenada através das regiões mais próximas da superfície. Como resultado desse contato imperfeito e dessa segunda reflexão, observa-se um aumento no tempo de impacto ao qual se encontram incorporadas as variações de amplitude e fase do pulso refletido. A expressão para a duração do tempo de impacto é dada por:

$$t = \frac{2\ell}{c} + \delta t + \Delta t \quad (3.1)$$

onde  $\delta t$  representa o tempo necessário à correção da mudança de fase e  $\Delta t$  o tempo requerido para que a onda de compressão atinja a fração de sua maior amplitude (2ª reflexão), resultando em um tempo de impacto muitas vezes superior a  $4 \ell/c$ . Em virtude do descrêscimo na compressão no instante em que o pulso refletido na extremidade livre retorna à interface de impacto, o pulso de compressão originado da dupla reflexão do pulso inicial, apresenta uma amplitude bem menor. Daí se explica o degrau existente no pulso incidente das figuras 3.8 - 3.10 resultante de uma reflexão imperfeita na região de contato. Para projeteis longos, onde  $\Delta T$  é relativamente pequeno, grande parte da energia se encontra no pulso longitudinal durante o impacto, mas já para projeteis muito pequenos, a energia do pulso em cada reflexão é convertida, em grande parte em energia de

deformação da vizinhança da área de contato, em confirmação às condições postuladas por HERTZ, de que a deformação é sempre inteiramente confinada a pequenos volumes em torno da área de contato.

Quanto ao pulso refletido no obstáculo suave, figura 3.8, observa-se que o mesmo apresenta a forma de dois pulsos opostos e consecutivos, como consequência da redução e posterior ampliação das dimensões da seção transversal. Na seção 1.3, onde os efeitos de transmissão de um pulso em presença de descontinuidade são analisados, verifica-se para a passagem de um pulso incidente de compressão em face de uma redução de área, o pulso refletido é de tração tendo em vista a ocorrência da condição de extremidade livre. O inverso aplica-se ao caso de ampliação das dimensões transversais quando o sinal do pulso refletido é de compressão. Logo o pulso refletido gerado pela onda incidente no obstáculo, se apresenta composto dos pulsos de tração e compressão referentes a 1ª e 2ª etapas do obstáculo, respectivamente.

Observe-se que a amplitude do pulso refletido de compressão registra-se menor com relação a amplitude do pulso refletido de tração. Isto se explica em face do pulso refletido de compressão, resultado de uma reflexão dupla no obstáculo, apresentar-se superposto ao primeiro pulso refletido, uma vez que o comprimento do pulso originado na colisão, é muito grande comparado as dimensões do obstáculo. Quando ao pulso transmitido, figura 3.9 a interpretação é análoga à descrita acima, visto que, o pulso incidente de compressão ao percorrer a 1ª etapa do obstáculo, sofre um descrêscimo de mesma intensidade

do pulso refletido de tração, e logo em seguida, ao percorrer a 2ª etapa do obstáculo é acrescido da mesma intensidade do pulso refletido de compressão. Logo, após todo este processo, o pulso transmitido após o obstáculo assume cerca de 92% da intensidade do incidente na barra.

Os efeitos de reflexão e refração para um pulso incidente de compressão, através de uma variação brusca de seção transversal, podem ser interpretados de forma análoga ao caso anterior. Na figura 3.10, o efeito da reflexão no obstáculo bursco, degrau, também registra uma amplitude maior para o pulso refletido de tração, fato este explicado no primeiro caso, enquanto que, o pulso transmitido após o obstáculo atinge 81% da intensidade do pulso incidente originado no impacto.

### 3.3 - UTILIZAÇÃO DE PROJÉTIL CURTO

A segunda parte da experiência consiste no impacto colinear de um projétil cilíndrico de alumínio curto de 43 mm de comprimento e mesmo diâmetro da barra. Os resultados adquiridos para ambos os obstáculos, suave e bursco, são aqui apresentados na forma de gráficos obtidos a partir da ampliação de fotografias da tela do osciloscópio.

Efetuando-se em primeiro plano a análise para o caso em que a barra apresenta obstáculo suave o pulso inci-

dente de compressão originado na interface de impacto adquire a forma aproximadamente triangular, figura 3.11 , onde de acordo com a teoria clássica de impacto, a forma a ser adquirida seria a de um pulso retângular cuja duração seria de  $18 \mu s$ . A deformação ocorrida no pulso incidente se deve às mesmas características físicas do impacto, descritas na seção anterior. Observe que o tempo de subida na formação da frente de onda é de  $20 \mu s$ , idêntico ao impacto anterior, enquanto que, o tempo de descida se processa com maior rapidez, em torno de  $10 \mu s$ , tendo em vista um maior número de partículas em contato, na complementação da formação do pulso bem como do impacto. Este maior número de partículas em contato na complementação do impacto, se deve ao fato de que em impactos produzidos por barras muito curtas, grande parte da energia incidente é transformada em energia de deformação na região de contato.

O pulso refletido na passagem do obstáculo, apresenta a mesma composição do caso descrito anteriormente, ou seja, pulsos consecutivos de tração e compressão já para o pulso transmitido a sua amplitude é de 79% da amplitude do pulso incidente.

A figura 3.12 , mostra os efeitos de reflexão e transmissão em presença do obstáculo brusco. O pulso incidente de compressão registra as mesmas características do pulso incidente descrito acima, figura 3.11 , uma vez tratar-se das mesmas condições de impacto.

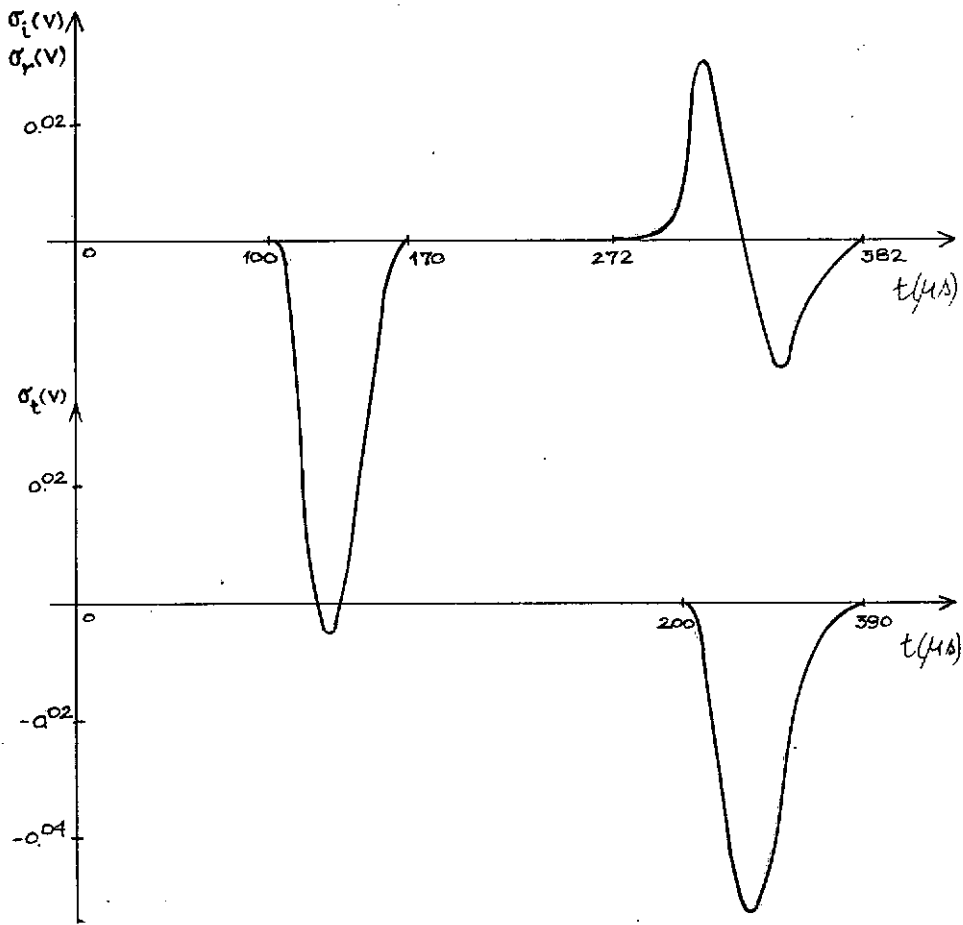


Figura 3.11 - Obstáculo suave - projétil curto.

ESTAÇÃO 1: Pulsos incidente e refletido

ESTAÇÃO 2: Pulso transmitido

Quanto ao pulso refletido no obstáculo brusco, persiste a predominância do pulso refletido de tração com relação ao pulso refletido de compressão. Para este caso, a intensidade de transmissão é de 70% do pulso incidente original.

As figuras 3.11 e 3.12 estão plotadas na mesma escala das fotografias, consistindo em  $50 \mu s$  por divisão na escala de tempo (horizontal) e amplitudes de 0.01 Volts por divisão na escala vertical do osciloscópio.

Esta amplitude corresponde a uma tensão de aproximadamente  $1.3 \times 10^6 \text{ kgt/m}^2$ .

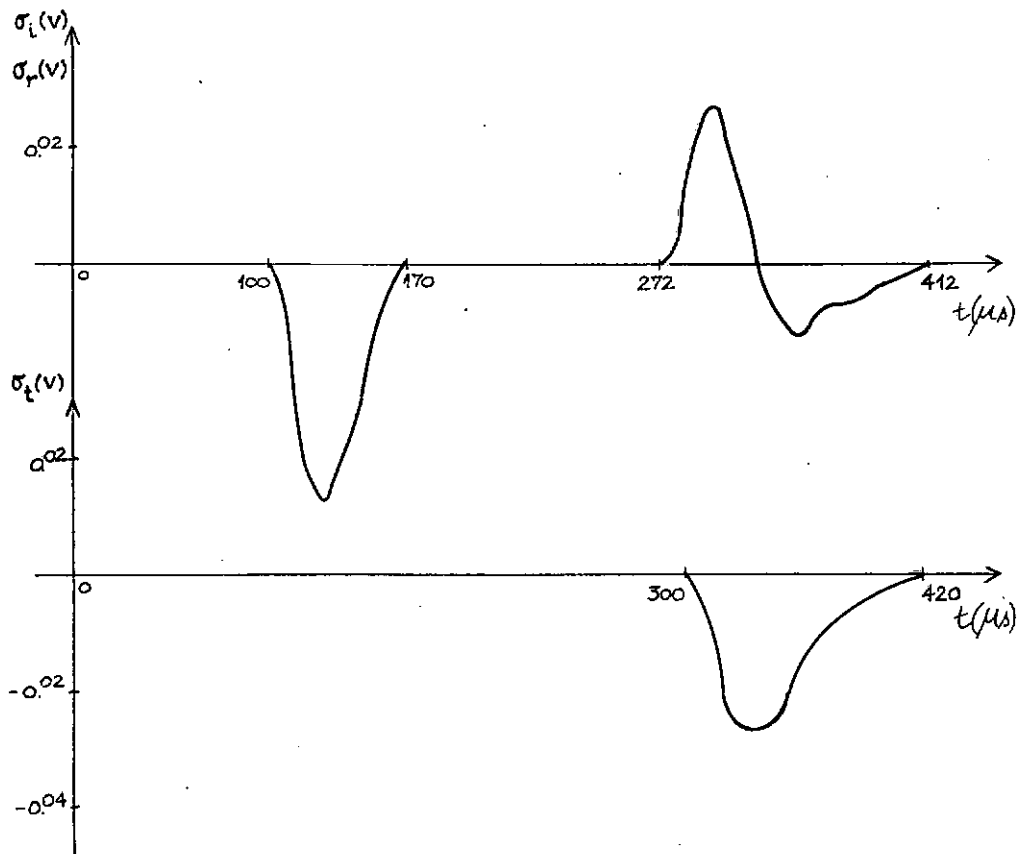


Figura 3.12 - Obstáculo brusco - projétil curto.

ESTAÇÃO 1: Pulsos incidente e refletido

ESTAÇÃO 2: Pulso transmitido

Dentro do estudo experimental com a utilização de projéteis curtos, foi testado o impacto longitudinal de uma esfera de aço, diâmetro de 12.7 mm, para o caso em que a barra apresenta variação brusca de seção transversal. Nesta última parte da experiência não se chegou a resultado conclusivos com relação aos efeitos de reflexão e transmissão na barra, apresentados na figura 3.13, em virtude da ocorrência de deformação permanente da extremidade livre da barra, logo no primeiro teste de impacto.

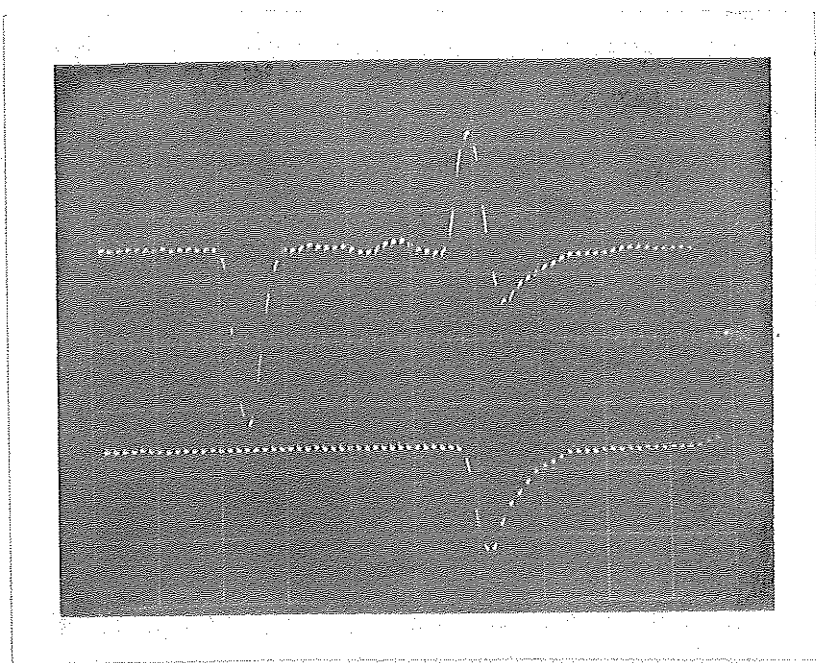


Figura 3.13 - Obstáculo brusco - projétil: ESFERA  
ESTAÇÃO 1: Pulsos incidente e refletido  
ESTAÇÃO 2: Pulso transmitido

A deformação ocorrida na superfície de contato da barra se deve ao fato da existência de elevadas concentrações de tensões produzidas pela esfera no momento do impacto.



## CAPÍTULO IV

## 4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 4.1 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS: NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS

A obtenção da solução numérica referente a transmissão de pulsos longitudinais em barras de seção transversal variável, com a utilização de processo computacional e com base no método das características, encontra-se descrita na seção 2.3. Os resultados numéricos e experimentais aqui apresentados, foram obtidos para quatro realizações do experimento, com base no impacto dos projeteis longo e curto, para os dois tipos de obstáculos.

Para a solução numérica no caso do obstáculo suave, foi empregada a forma real da barra, medida com precisão, para deslocamento de 0.5 mm, correspondendo a tempo de propagação de 0.1  $\mu$ s. A condição de contorno imposta na resolução do problema,  $S_p(1, j)$ , consiste na utilização do pulso incidente experimental e não a onda retangular teórica prescrita pela teoria clássica de impacto [17]. A obtenção dos valores do pulso incidente experimental, inseridos na simulação numérica, foi adquirida das fotografias da tela do osciloscópio com a utilização de um microscópio de medidas, precisão de centésimos de milímetros, para deslocamentos correspondentes a 10  $\mu$ s, no caso do projétil longo e de 6  $\mu$ s para o projétil curto.

A figura 4.1 apresenta os resultados numéricos e experimentais, reduzidos à mesma escala e plotados em gráficos tensão x tempo, relativos ao impacto do projétil longo, com a variação suave de seção transversal.

tensão(%)

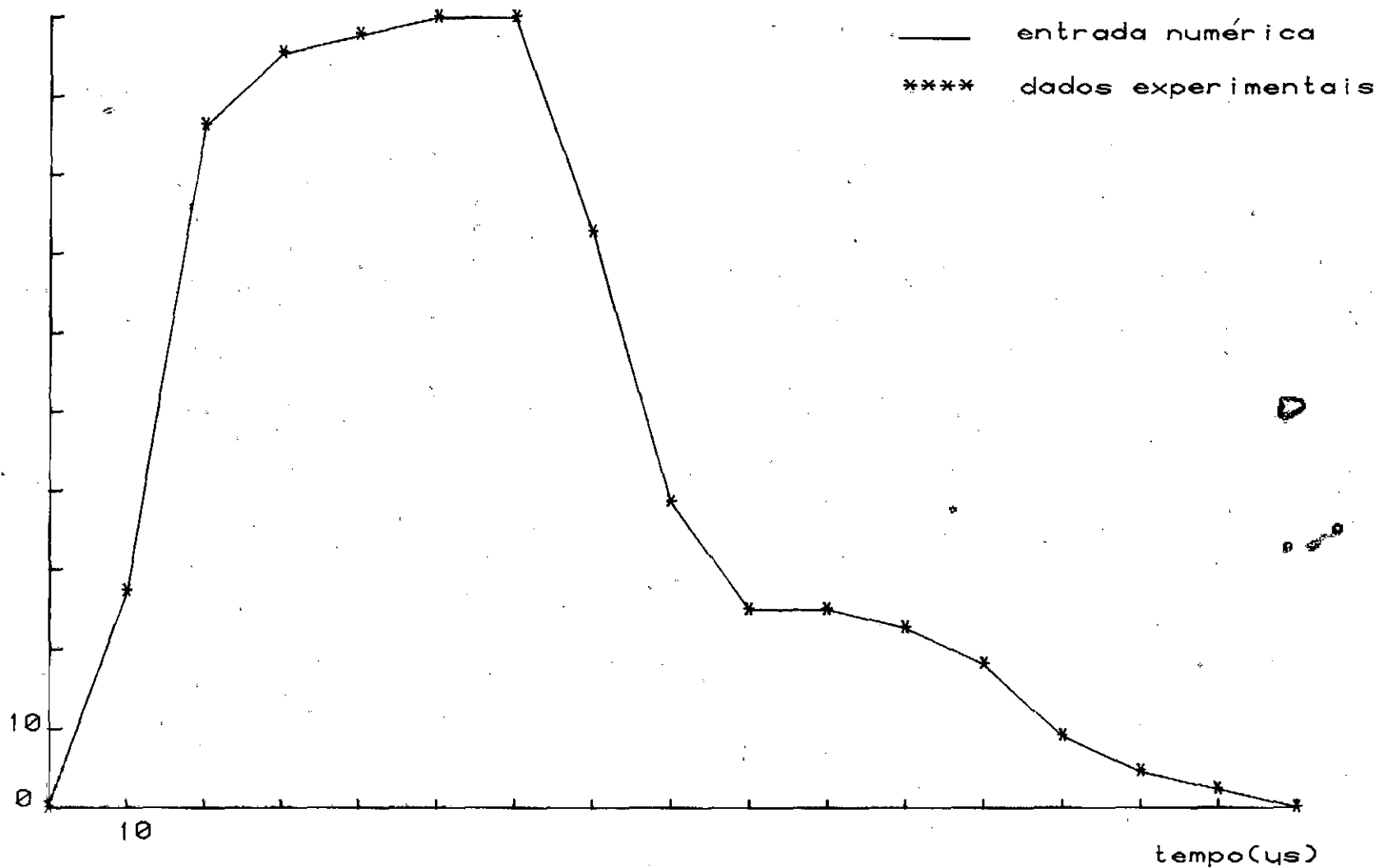


FIG.4.1-onda incidente; obstáculo suave; projétil longo

tensão(%)

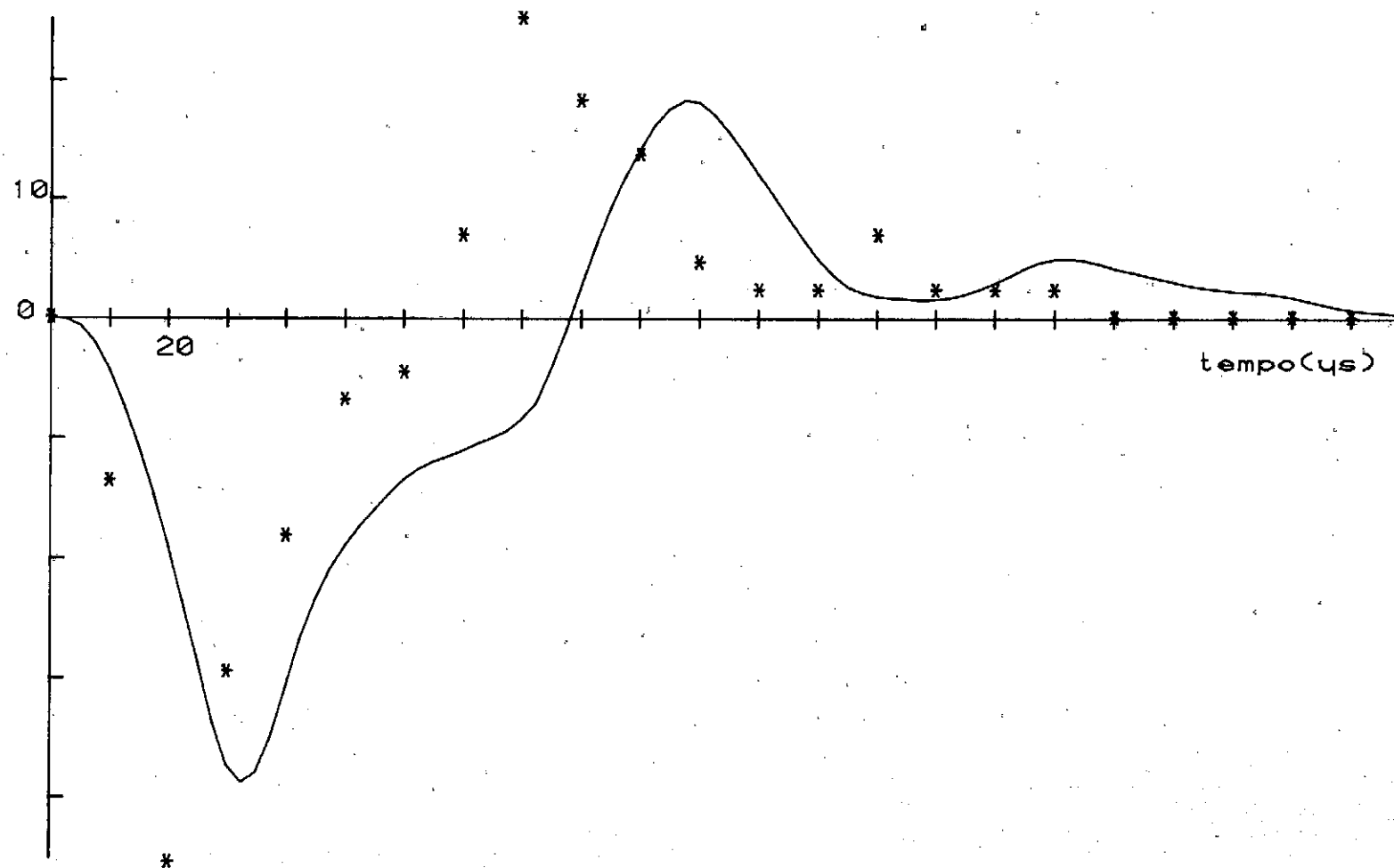


FIG.4.2-onda refletida; obstáculo suave; projétil longo

tensão(%)

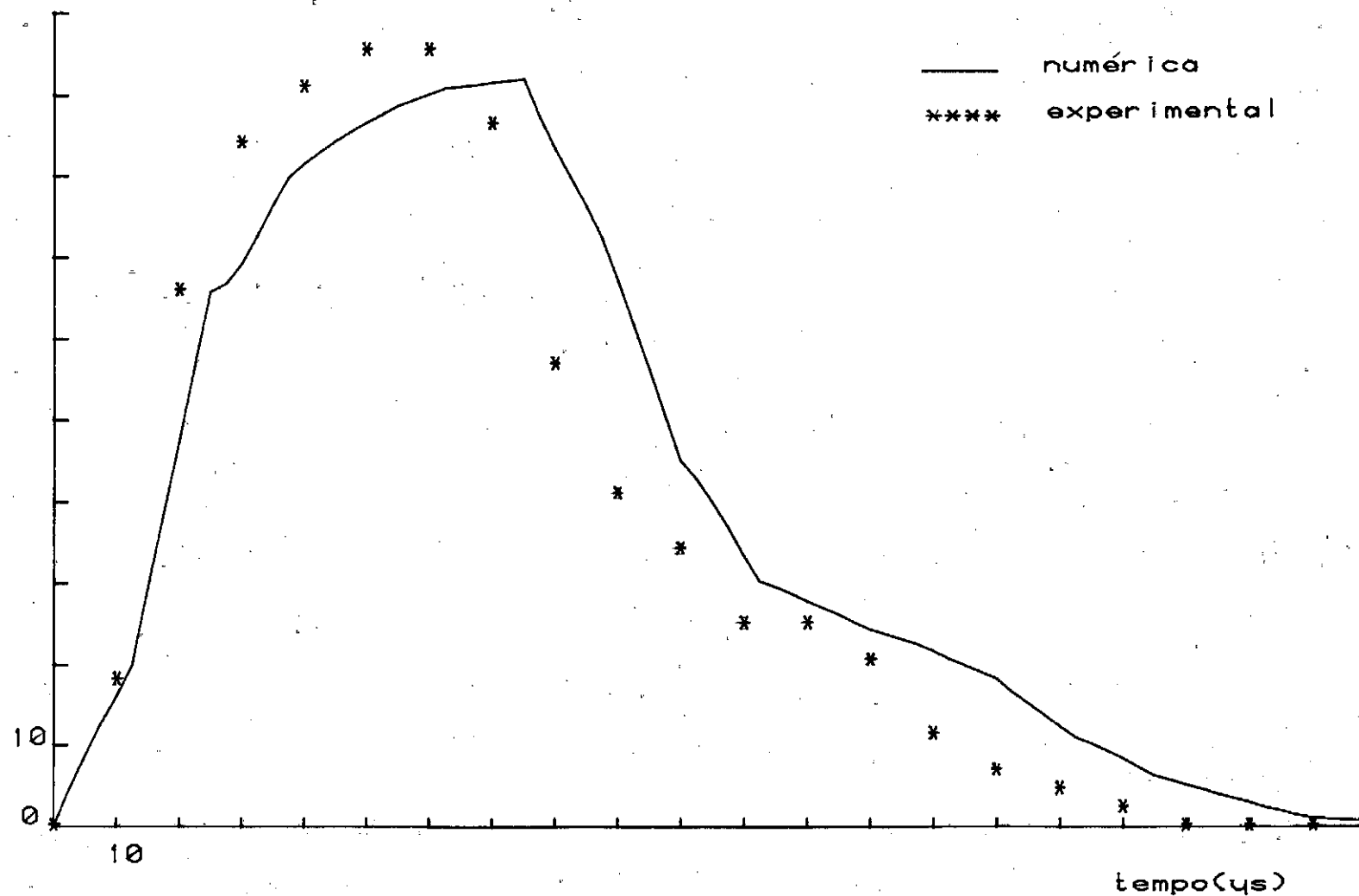


FIG.4.3-onda transmitida; obstáculo suave; projétil longo

Os pontos obtidos a intervalos de  $10\ \mu\text{s}$  e introduzidos no programa computacional, são interpolados linearmente para intervalos de  $0.1\ \mu\text{s}$ . Os valores plotados na ordenada do gráfico correspondem à relação entre a tensão incidente teórica, ou seja,  $1/2\ \rho c v$ , e a tensão máxima obtida experimentalmente, dada por  $\sigma = E \bar{\epsilon}$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade do alumínio e  $\bar{\epsilon}$  a deformação máxima ocorrida, o qual é calculada a partir da expressão:

$$\bar{\epsilon} = \frac{2V}{(G.F) \times V_p \times 10} \quad (4.1)$$

sendo  $V$  a amplitude de voltagem de saída,  $(G.F)$  o fator de strain-gage, igual a 2.04 e  $V_p$  representa a voltagem na ponte ( $5V + 1\%$ ), ver [18]. O fator 10 na equação 4.1 está relacionado com o amplificador diferencial presente na experiência, o qual amplifica de 10 vezes os sinais das pontes.

Examinando o pulso plotado na figura 4.1, observe-se que o registro do pulso incidente tem início na estação 1 de strain-gage, representada pela origem dos eixos, e tem como tempo de propagação  $160\ \mu\text{s}$ . O início do pulso refletido se dá a  $188\ \mu\text{s}$ , figura 4.2, na escala de tempo, correspondendo ao tempo de retorno da primeira parcela das ondas refletida, à estação 1 de strain-gage. O tempo de propagação do pulso refletido é de  $190\ \mu\text{s}$ , dos quais  $140\ \mu\text{s}$  estão relacionados com a reflexão do pulso principal, enquanto que, os  $50\ \mu\text{s}$  restantes, representados no gráfico como o terceiro pulso consecutivo de reflexão, se referem a reflexão do segundo pulso, pulso secundário, presente no pulso incidente de compressão.

Note-se que a forma do pulso refletido no obstáculo suave difere em muito do pulso incidente na barra. Isto se explica no fato da existência de uma grande dispersão na filtragem do pulso incidente através da variação suave de seção transversal. Esta dispersão é caracterizada pelas inúmeras reflexões contínuas, ocorridas ao longo do obstáculo. A presença de uma região de "silêncio" entre os pulsos consecutivos de tração e compressão, se deve a um período de reflexão constante relativa ao patamar do pulso incidente, onde a tensão compressão se apresenta sem variação e com valor máximo de sua amplitude. A estação 2 de strain-gage registra a passagem do pulso transmitido através do obstáculo, à 200  $\mu$ s da primeira estação. O tempo registrado na propagação do pulso transmitido é de 170  $\mu$ s, figura 4.3, um pouco maior com relação ao pulso incidente e cuja forma se apresenta quase inalterada comparada à do pulso originado no impacto. Com isto verifica-se a predominância do efeito de transmissão sobre o de reflexão, quando no meio se efetua uma variação contínua de seção, tendo em vista a ocorrência de apenas em "descascamento" na forma do pulso incidente, durante o percurso do obstáculo.

Em continuação aos resultados obtidos para a variação suave na seção transversal da barra, o pulso incidente a reflexão e transmissão para o caso do impacto o projétil curto, estão ilustrados nas figuras 4.4, 4.5 e 4.6. Na obtenção da solução numérica procede-se de forma idêntica ao caso anterior, com os resultados numéricos e experimentais plotados em gráficos, reduzidos à mesma da figura 4.1.

tensão(%)

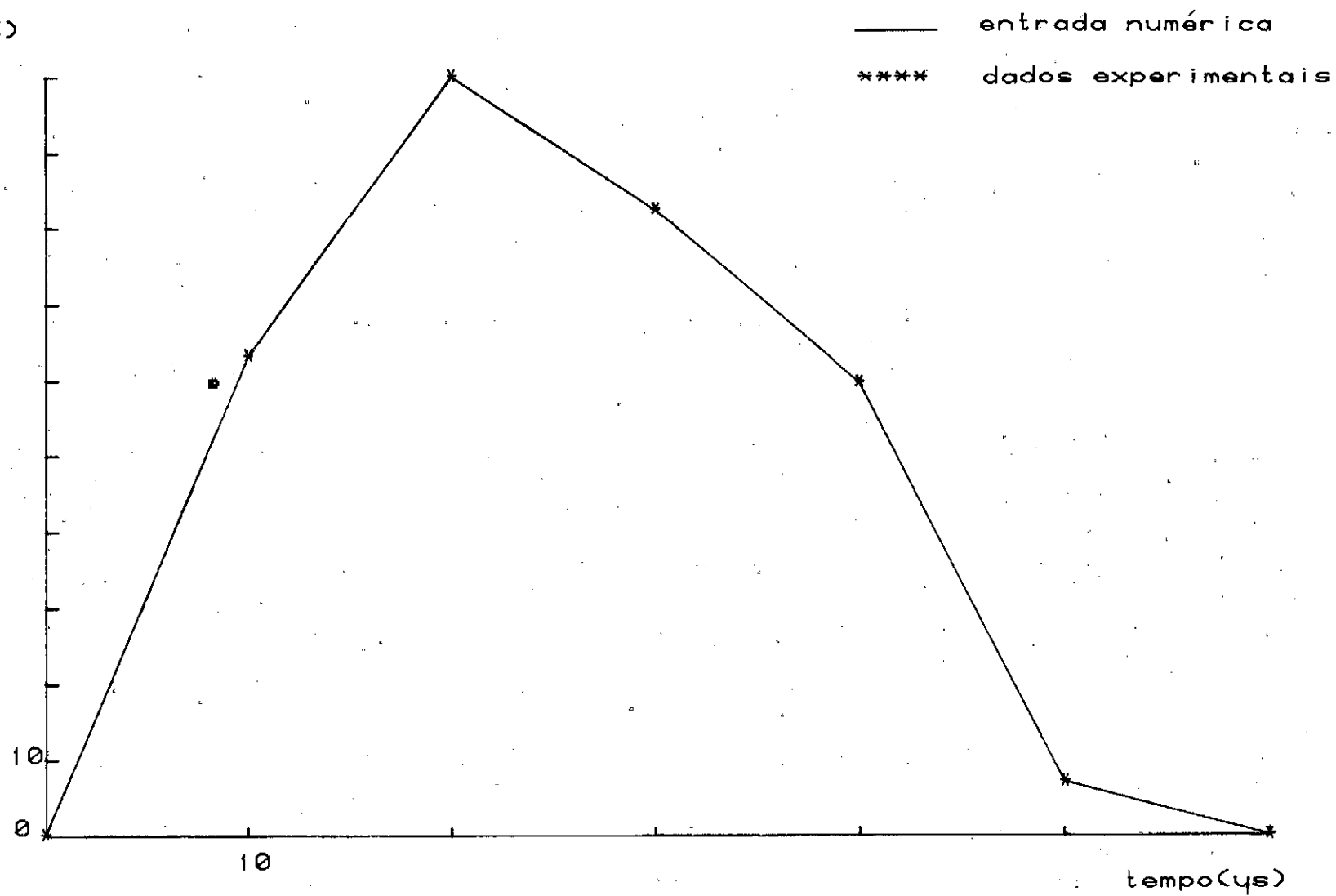


FIG.4.4-onda incidente; obstáculo suave; projétil curto



tensão(%)

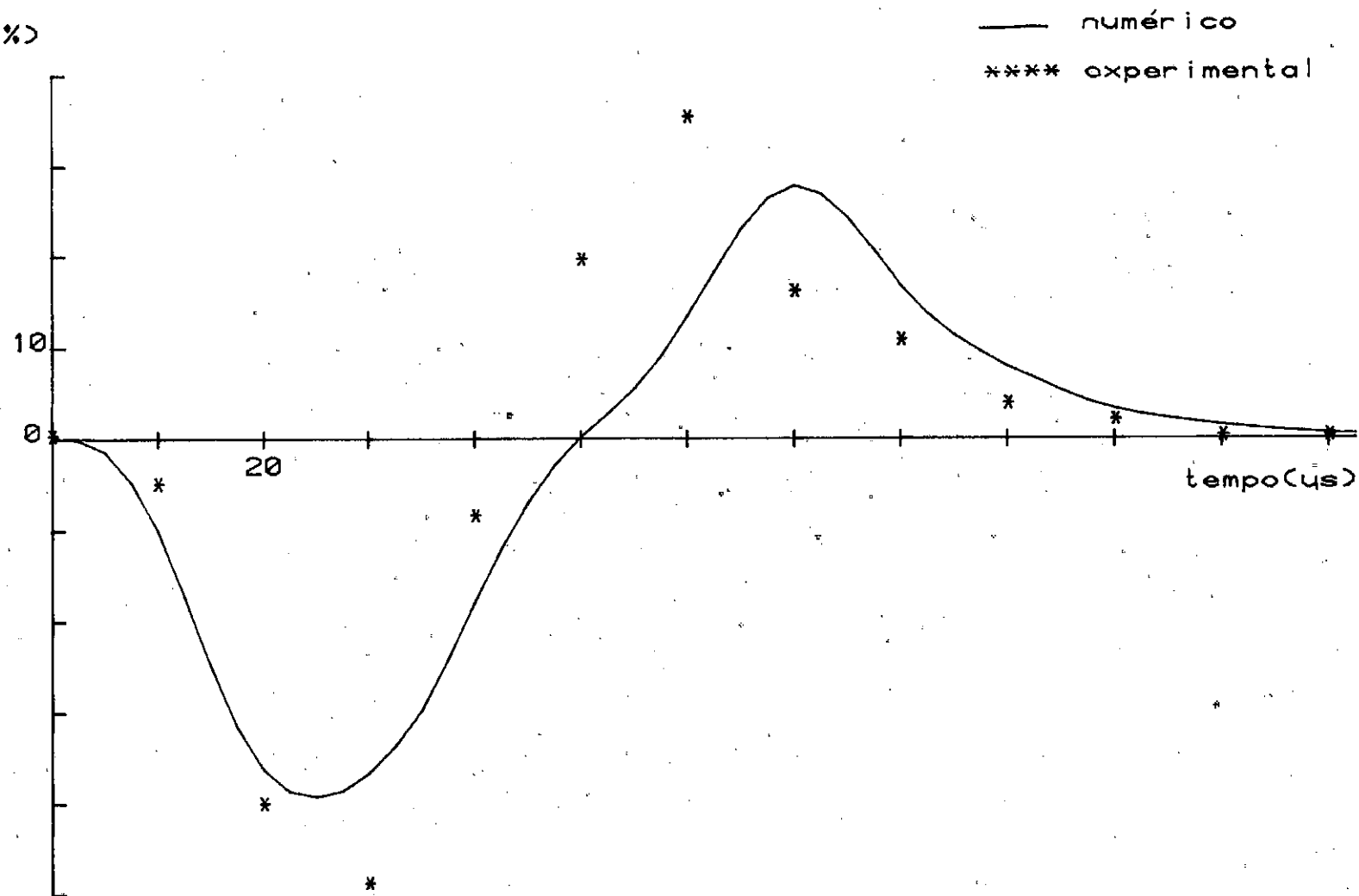


FIG.4.5-onda refletida; obstáculo suave; projétil curto

tensão (%)

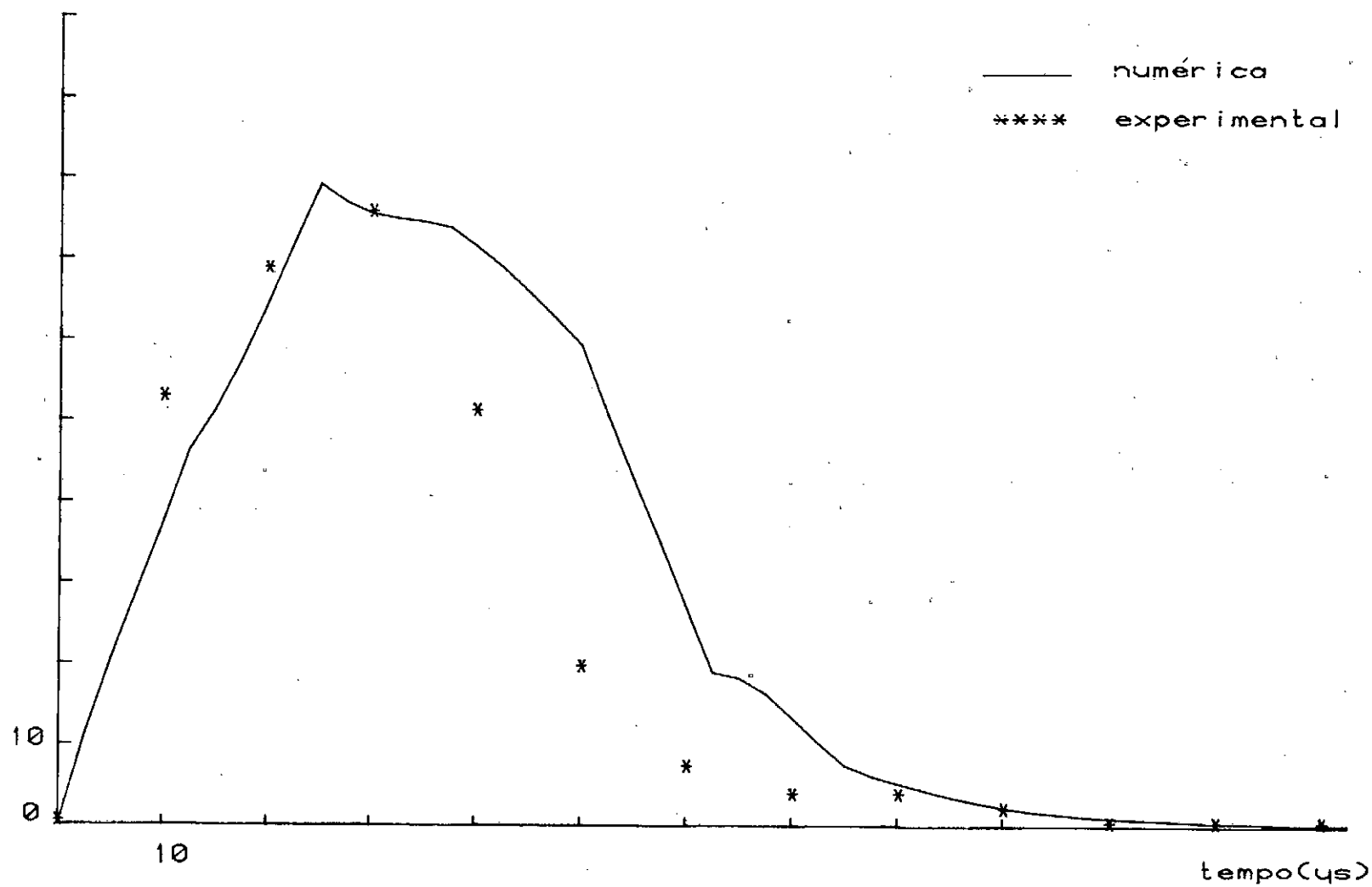


FIG.4.6-onda transmitida; obstáculo suave; projétil curto

Examinando os pulsos obtidos no impacto do projétil curto, observe-se que o pulso incidente de compressão tem duração de  $70\ \mu\text{s}$ , dos quais  $30\ \mu\text{s}$  são atribuídos a formação do próprio pulso, ver seção 3.3, e os  $40\ \mu\text{s}$  restantes correspondem as duas reflexões existentes no projétil em face do impacto não perfeito. A não visualização da formação dos pulsos de compressão em consequência da reflexão dupla, se deve ao fato de que, sendo o projétil muito curto, a energia contida no primeiro pulso de compressão é transformada em grande parte em energia de deformação na vizinhança da superfície de contato, fazendo com que o segundo pulso de compressão, originado da segunda reflexão do pulso inicial, atinja com maior rapidez a sua amplitude máxima, se superpondo assim, ao pulso de compressão inicial, resultando aparentemente, em apenas um pulso de compressão originado no momento da colisão.

Quanto aos efeitos de reflexão, a forma obtida para o pulso refletido difere com relação a forma obtida no caso anterior, apenas na não existência da região de "silêncio" entre os dois pulsos consecutivos, em virtude do pulso incidente originado do impacto do projétil curto, não apresentar uma região de valores constante de tensão, como consequência de tempo de propagação muito pequeno.

A influência do efeito de filtragem do obstáculo sobre o pulso incidente, é de pouca intensidade, como descrito no primeiro caso apresentado, tendo em vista a não ocorrência de distorção na forma do pulso transmitido.

A estação 2 dos extensômetros elétricos registra, à  $200\ \mu\text{s}$  da estação 1, a passagem do pulso transmitido

após o obstáculo, cujo tempo de propagação é de  $90 \mu s$ . Quanto a sua forma, permanece a forma do pulso incidente, consolidando a condição de quase preservação da forma da onda, quando a sua transmissão se dá através de meios cuja variação de seção se processa contínua e suavemente.

A segunda parte da experiência, consiste no impacto dos projeteis longo e curto para o caso em que a barra apresenta a variação brusca de seção transversal, descrita na seção 3.1. A solução numérica foi obtida da utilização direta das equações 2.18 e 2.19, onde os valores atribuídos à tensão incidente e inseridos nas equações, foram obtidos a partir da tensão incidente experimental. A aquisição dos valores se dá com a leitura de fotografias da tela do osciloscópio, também com a utilização do microscópio de medidas, para intervalos de deslocamentos correspondentes a  $6 \mu s$ .

Os resultados numéricos e experimentais referentes à incidência e aos efeitos de reflexão e transmissão para o impacto do projétil longo, estão ilustrados nas figuras 4.7, 4.8, e 4.9 plotados em escalas idênticas às utilizadas nos casos anteriores. O pulso incidente obtido, possui as mesmas características do pulso incidente registrado na figura 4.1, uma vez, trata-se do mesmo projétil e condições semelhantes de impacto. O tempo de propagação para o pulso refletido no obstáculo brusco é de  $270 \mu s$ , e a forma obtida mostra certa tendência de preservação da forma do pulso incidente. Isto se explica em face de que as partículas constituintes da frente de onda em presença de uma variação abrupta de seção transversal, refletem simultaneamente conservando assim a integridade de sua forma inicial.

tensão(%)

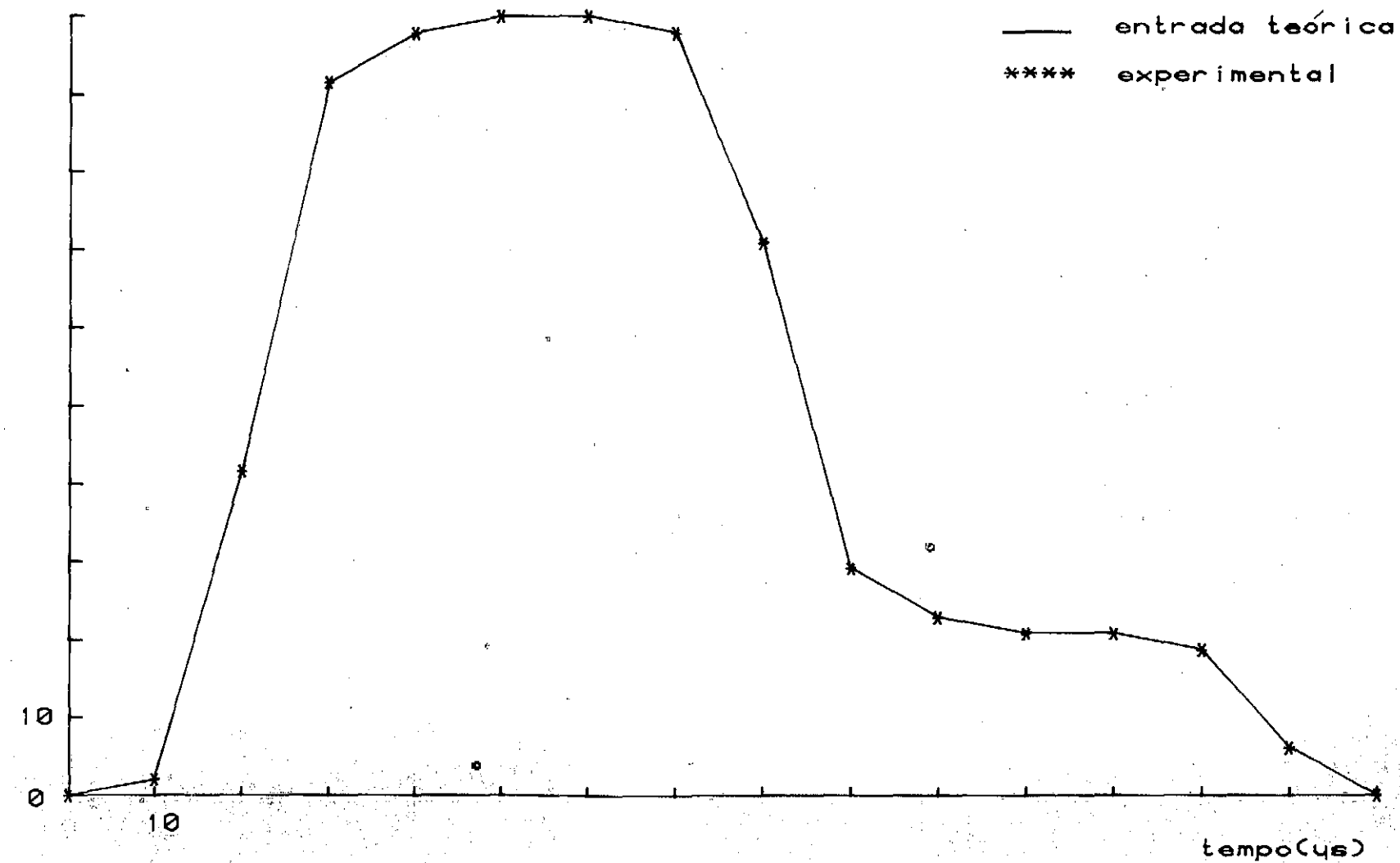


FIG.4.7-onda incidente; obstáculo brusco; projétil longo

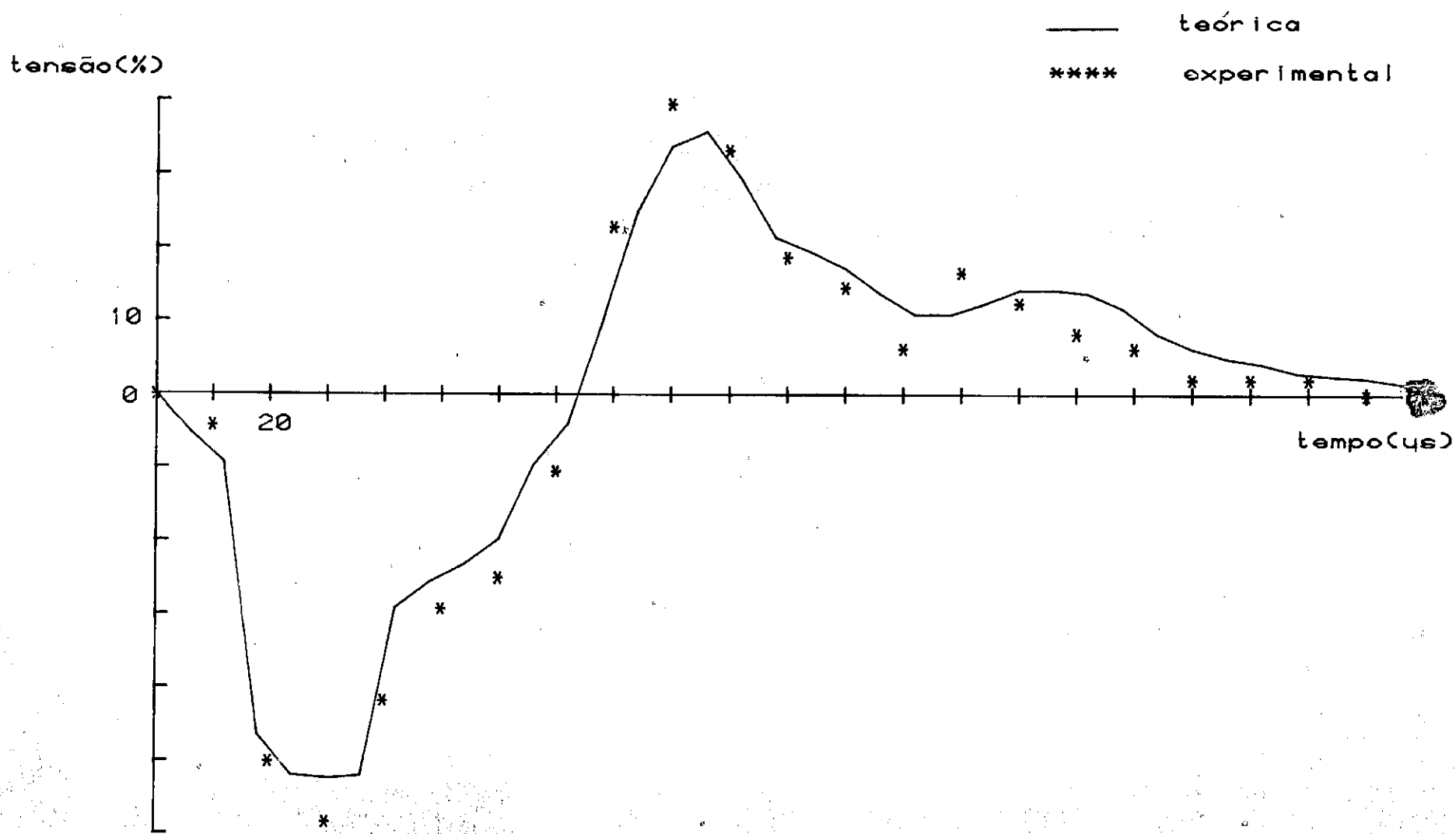


FIG.4.8-onda refletida; obstáculo brusco; projétil longo

tensão(%)

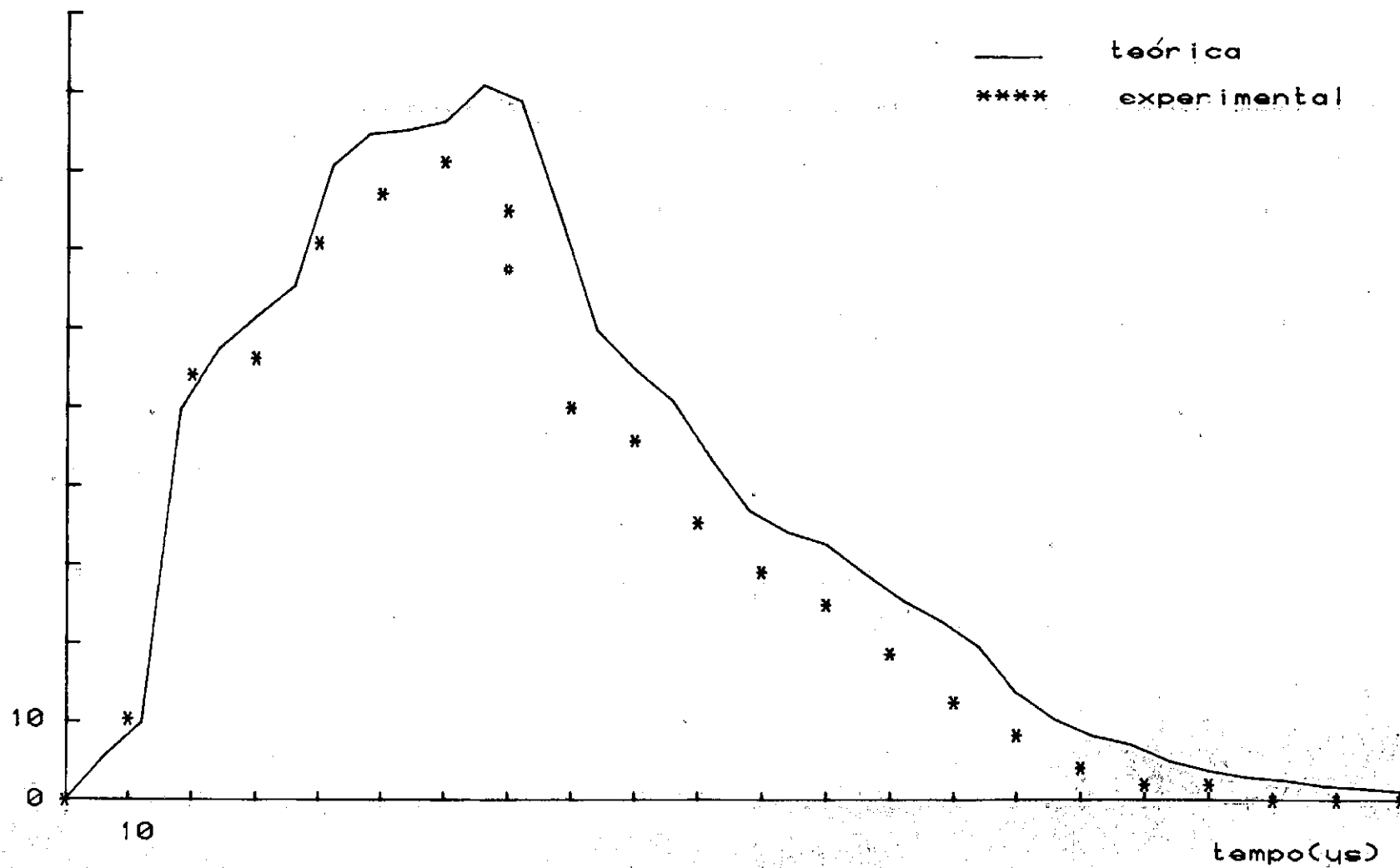


FIG.4.9-onda transmitida; obstáculo brusco; projétil longo

A mudança de forma ocorrida no primeiro pulso refletido, caracterizada pelo degrau, se deve a superposição das reflexões do pulso refletido na primeira etapa do obstáculo, referente a parcela do pulso incidente onde os valores da tensão apresentam pouca variação, com o pulso refletido na segunda etapa do obstáculo, ver tabelas no apêndice B. Este efeito de superposição se processa durante a formação do segundo pulso refletido, produzindo um decréscimo em sua amplitude e as distorções observadas em sua forma.

O pulso transmitido observado na figura 4.9, registra um tempo de propagação de  $210 \mu s$  e a sua forma difere bastante da do pulso inicial. Esta discrepância existente entre os dois pulsos se origina do forte efeito de reflexão sobre o pulso incidente, quando no meio se processa uma variação brusca de seção. Também devem haver restrições à validade da teoria unidimensional para grandes variações de seção transversal. No presente experimento, a redução de área é de 4 para 1. As figuras 4.10, 4.11 e 4.12 mostram os resultados numéricos e experimentais obtidos do impacto do projétil curto, cujas escalas utilizadas são as mesmas de todos os casos até agora apresentados. Para a obtenção da solução numérica, procedem-se de forma análoga ao caso anterior, uma vez tratar-se do mesmo tipo de obstáculo. O pulso de incidência obtido para este impacto, embora apresente uma amplitude inferior comparado ao pulso de incidência para o caso em que a barra possui uma variação suave de seção, como consequência do emprego de velocidades de impacto diferentes, observe figuras 3.11 - 3.12, registra as mesmas características geométricas e tempos de propagação semelhantes.



tensão(%)

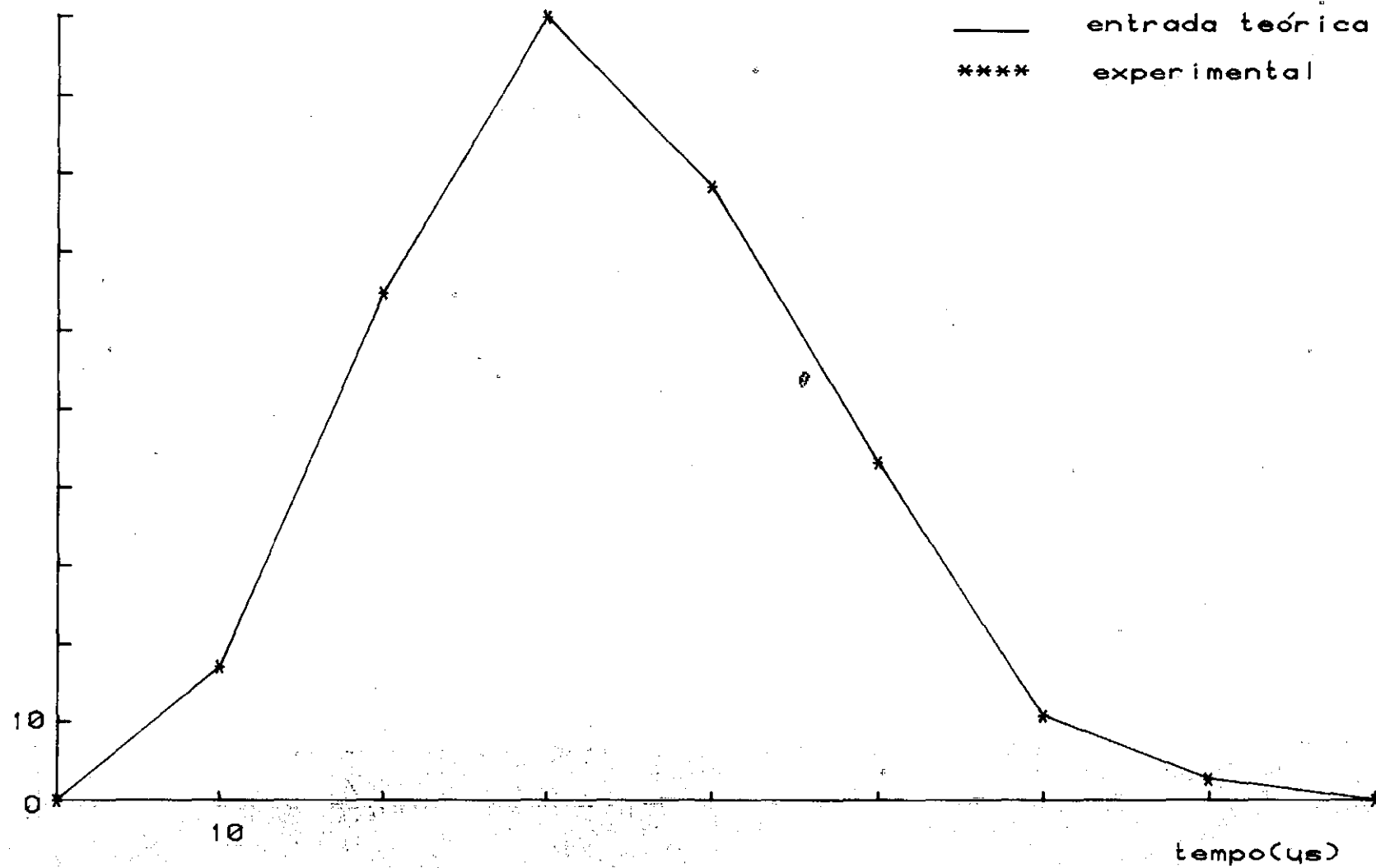


FIG.4.10-onda incidente; obstáculo brusco; projétil curto

tensão(%)

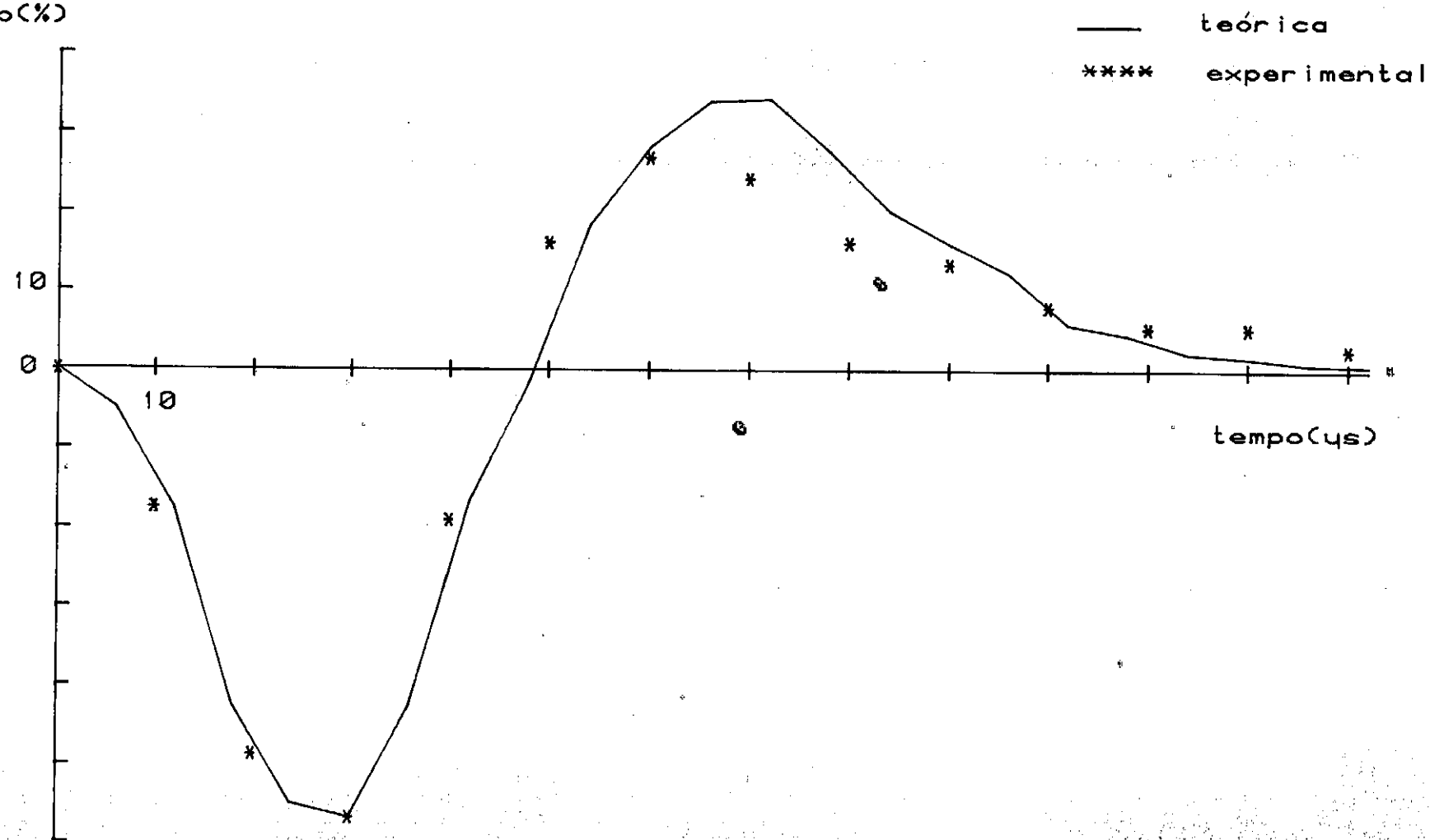


FIG.4.11-onda refletida; obstáculo brusco; projétil curto

tensão(%)

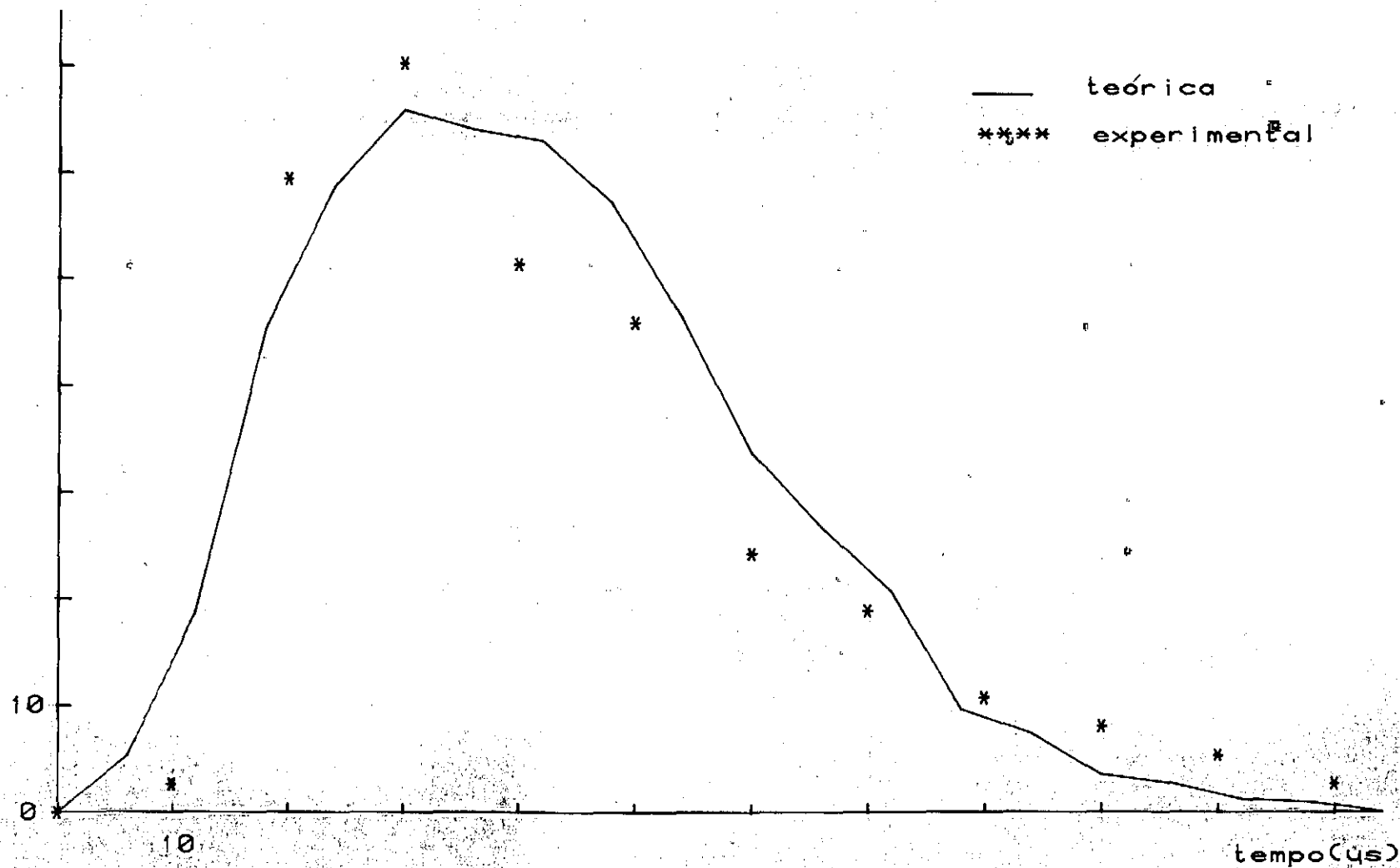


FIG.4.12-onda transmitida; obstáculo brusco; projétil curto

Para o estudo de comparação entre os resultados numéricos e experimentais, ambos foram reduzidos à mesma escala de amplitude de forma a se obter uma melhor visualização da influência da não homogeneidade existente no meio, na formação dos pulsos obtidos.

A interpretação dada aos pulsos gerados no caso anterior, prevalece com relação aos resultados reportados na figura 4.4, tendo em vista ser o mesmo obstáculo em estudo, e a ocorrência de superposição dos pulsos na reflexão apesar do comprimento do pulso gerado no impacto ser menor com relação ao do caso anterior, mas ainda grande comparado as dimensões do obstáculo. Observando-se o pulso de tração refletido na primeira etapa do obstáculo brusco, verifica-se mais claramente a continuidade da forma do pulso incidente, uma vez que a influência da superposição dos pulsos está relacionada apenas com a amplitude. As distorções observadas nas formas do pulso refletido de compressão e do pulso de transmissão se devem as inúmeras reflexões ocorridas no interior do obstáculo. Quanto aos tempos de propagações para os pulsos refletido e transmitido são de  $140 \mu s$  e  $120 \mu s$  respectivamente.

Em última análise de todos os resultados aqui apresentados, registra-se a grande aproximação existente entre os resultados numéricos e experimentais, quando a onda incidente utilizada, é a própria onda gerada no experimento.

Observa-se em todos os gráficos aqui apresentados a inversão dos resultados obtidos, uma vez que a compressão encontra-se plotada com valores positivos e tração com valores negativos.

## 4.2 - CONCLUSÕES

Este trabalho na área de propagação de ondas, levou o autor a enfrentar concretamente as dificuldades de realizar, simultaneamente, a modelagem matemática, solução numérica, e a verificação experimental na propagação de pulsos.

Uma das características principais das experiências é a curta duração dos eventos. Isto dificultou a aquisição de dados tendo em vista que sistemas físicos apresentam a tendência "natural" de eliminar as altas frequências, acarretando distorções na forma do sinal, o que poderia ser corrigido em parte pela utilização de equipamentos relativamente sofisticado.

Os equipamentos utilizados na experiência são de várias origens, sendo alguns manufaturados no laboratório de vibrações e acústica, como por exemplo a fonte de alimentação das pontes de extensômetros. Mesmo com todo o cuidado dispensado na montagem, o ruído da fonte de alimentação é elevado em relação ao sinal observado, da ordem de 5%.

Uma grande imprecisão também provem da aquisição de dados a partir da foto da tela do osciloscópio. Isto se deve ao fato de que para se capturar no mesmo instante os pulsos refletidos e transmitidos, necessita-se de dois canais de aquisição de dados, o que foi realizado no osciloscópio pelo uso do duplo traço (CHOPPED), o que reduz o número de pontos observados. A combinação do efeito do ruído da fonte com o efeito do chopped, levou a uma indeterminação do momento inicial dos pulsos refletidos e transmitidos. Assim, observa-se comparando os resultados numéricos e experimentais uma defasagem da

ordem de  $5\mu s$ .

Quando compensada esta defasagem pode-se constatar uma considerável semelhança de forma das ondas experimentais e teóricas para uma mesma forma de onda incidente.

Um outro aspecto a ser observado na comparação entre os resultados numéricos e experimentais, é que as amplitudes máximas das ondas experimentais transmitida e refletida são frequentemente maiores do que as das ondas teóricas. Dentro da análise desse aspecto pode ser eliminada a hipótese de erro no método numérico utilizado, para a solução do problema, já que foram feitos testes comprovando a convergência através da conservação de energia.

Com relação à parte experimental, tendo em vista que um mesmo canal é usado na aquisição das ondas incidentes e refletidas, deve ser descartada a possibilidade de erro experimental a nível deste canal, o que não acontece com o outro canal, que é independente, e que pode apresentar uma pequena diferença, apesar de efetuada uma calibração prévia. Todas estas considerações mostram a grande dificuldade na aquisição dos dados experimentais.

Este trabalho se enquadra em uma linha de pesquisa que tem como propósito a identificação de defeitos em sólidos. Em uma fase posterior deste trabalho, tem-se como sugestão a caracterização do meio com uma função única independente da excitação. A função que poderia ser escolhida, seria a resposta impulsiva da barra entre dois pontos. Sabe-se que a resposta da barra pode ser obtida por uma operação de convolução entre a excitação e a resposta impulsiva. Para a identificação seria necessário efetuar a operação inversa, ou seja,

a deconvolução. É aparentemente uma operação simples, mas praticamente difícil de implementar devido a sua sensibilidade ao ruído, o que a torna imprecisa e devido a falta de precisão nos dados experimentais. Sugere-se então, o desenvolvimento de algoritmos especiais, com filtragem de ruído, para a solução deste problema.

## APÊNDICE A

### ONDAS ELÁSTICAS

Quando um meio elástico é excitado, perturbações se propagam através dele. Neste processo os elementos do meio são deformados e a perturbação é transmitida de um ponto a um outro próximo na forma de "ondas".

É visto que, as equações de movimento para um meio sólido elástico são dadas em termos desse deslocamento de partículas, e será mostrado aqui, que estas equações correspondem a dois tipos de ondas que podem ser propagadas, através de um sólido elástico ilimitado.

Para se estudar o problema, começamos com o estudo da teoria de movimento deste meio e consequentemente a sua equação dinâmica.

Quando um corpo elástico sofre variação em sua configuração inicial, devido à aplicação de um sistema de forças externas, este corpo é dito deformado. Qualquer ponto  $P$  pertencente a este corpo, com coordenadas retangulares espaciais fixadas  $(x, y, z)$ , é então deslocado à uma nova posição, cujas componentes de deslocamento são  $u, v$  e  $w$  respectivamente. Se  $Q$  é um ponto em sua vizinhança  $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ , suas componentes de deslocamento são dadas pela expansão de TAYLOR [19] na forma:



$$\begin{aligned}
 u &+ \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \dots \\
 v &+ \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z + \dots \\
 w &+ \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z + \dots
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Para pequenas deformações associadas com ondas elásticas, termos de ordem superior serão desprezadas.

Introduzindo as expressões para as componentes de deformação:

$$\begin{aligned}
 w_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \dots \\
 \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

As outras expressões são obtidas por uma variação cíclica das letras  $x, y, z$  e  $u, v$  e  $w$  respectivamente. Agora as componentes de deslocamento (A.1) podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned}
 u &+ (w_y \Delta z - w_z \Delta y) + (\epsilon_{xx} \Delta x + \epsilon_{xy} \Delta y + \epsilon_{xz} \Delta z) \\
 v &+ (w_z \Delta x - w_x \Delta z) + (\epsilon_{xy} \Delta x + \epsilon_{yy} \Delta y + \epsilon_{yz} \Delta z) \\
 w &+ (w_x \Delta y - w_y \Delta x) + (\epsilon_{zx} \Delta x + \epsilon_{zy} \Delta y + \epsilon_{zz} \Delta z)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Os primeiros termos dessas expressões são as componentes de deslocamento do ponto  $P$ , os termos do primeiro parêntese fornecem a rotação pura e os termos do segundo parêntese estão associados à deformação do elemento.

A matriz

$$\begin{matrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{matrix} \quad (A.4)$$

representa o tensor deformação, sendo este simétrico, uma vez que  $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} \dots$ . As três componentes

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

representam uma simples extensão paralela dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, enquanto que,  $\epsilon_{xz}$ ,  $\epsilon_{zy}$  e  $\epsilon_{zx}$  são componentes de deformação por cisalhamento. Sabe-se que a soma  $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \epsilon$  define a dilatação cúbica  $\epsilon$ , que a mesma independe da escolha do sistema de eixos coordenados ortogonais.

Para se obter a equação de movimento considera-se a variação da tensão, como feito anteriormente com a variação do ponto  $P$ , no elemento de volume do meio. Para este propósito a condição de equilíbrio de um pequeno paralelepípedo retangular de lados  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  (figura A.1) deve ser estudada.

As componentes de tensão variam através de suas faces; para se obter a força atuando em cada face, toma-se o

valor da tensão no centro de cada face multiplicada pela área da mesma. Observando a figura, vê-se que, seis forças independentes atuam paralela a cada eixo.

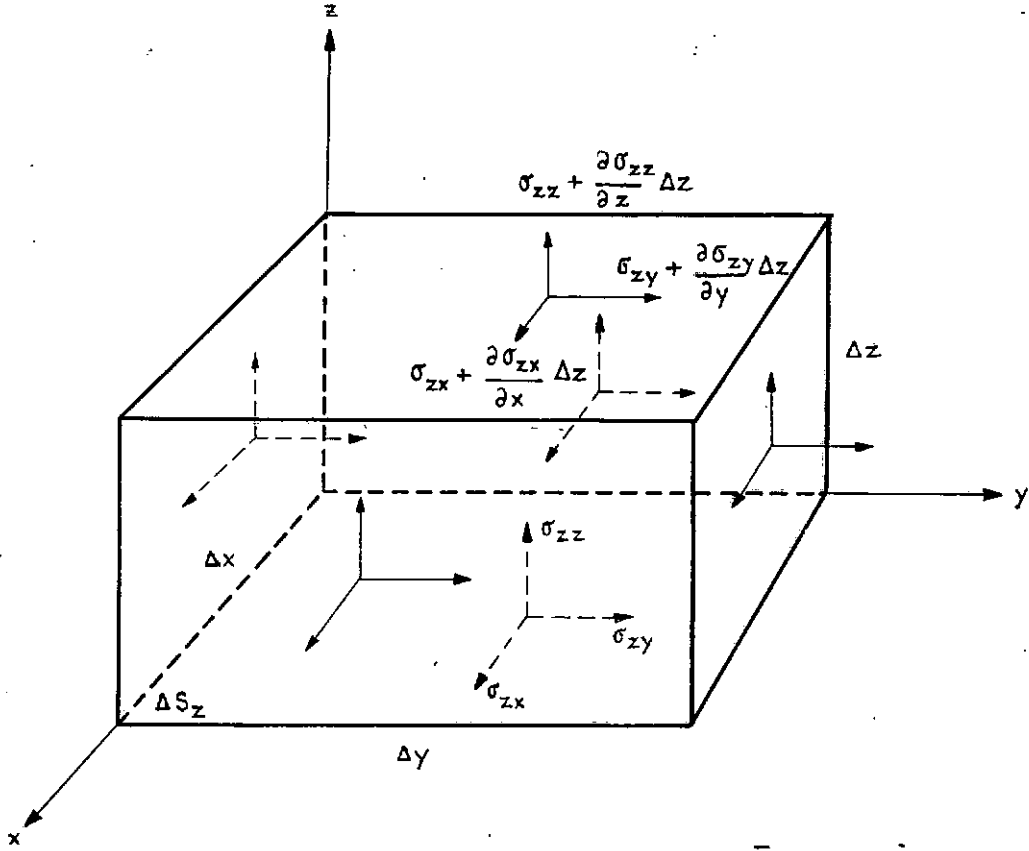


Figura A.1 - Componentes de tensão nas faces  $\Delta S_z$  do elemento de volume.

A componente da força resultante, atuante no elemento na direção  $x$ , produzida pelas tensões nas faces normais aos eixos  $x, y, z$  é (desprezando os termos de ordem superior):

$$\begin{aligned}
 & \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x - \sigma_{xx} \right) \Delta S_x + \\
 & + \left( \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \Delta y - \sigma_{yx} \right) \Delta S_y + \\
 & + \left( \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \Delta z - \sigma_{zx} \right) \Delta S_z
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

onde

$$\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$$

são as áreas nas faces normais aos eixos  $x, y, z$  respectivamente.

A equação anterior simplificada se reduz a

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

logo a equação de movimento para um sólido elástico é obtida adicionando-se as forças de corpo  $X, Y, Z$  e os termos de inércia

$$- \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x \Delta y \Delta z, \dots$$

para cada componente:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \rho X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \rho Y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \rho Z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (A.6)$$

nestas equações  $\rho$  é a densidade do meio.

Para um meio elástico é adotada como equação constitutiva a forma generalizada da lei de HOOKE: como uma das seis componentes de tensão é função de todas as componentes de deformação, em geral 36 constantes elásticas aparecem nas rela

ções tensão-deformação.

Se o meio é isotrópico (a deformação independe da orientação do material em relação ao carregamento) estas constantes são reduzidas a duas  $\lambda$  e  $\mu$  denominadas "constantes de Lamé". Deste modo as relações tensão-deformação são escritas na forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda \epsilon + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= \lambda \epsilon + 2\mu \frac{\partial u}{\partial y}, & \sigma_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zz} &= \lambda \epsilon + 2\mu \frac{\partial u}{\partial z}, & \sigma_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (A.7)$$

Utilizando as equações (A.7) nas equações (A.6), a equação de movimento pode ser escrita em termos das componentes de deslocamento  $u, v, w$  para um ponto em um sólido elástico e isotrópico:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z\end{aligned}\quad (A.8)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

Assumindo a não existência de forças de corpo, a equação de movimento fica na forma:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \mu \nabla^2 w\end{aligned}\tag{A.9}$$

Em geral as equações (A.9) representam a propagação de perturbações envolvendo dois tipos de movimento, caracterizados pela expansão de volume e pela rotação.

Ao estudar-se separadamente estes dois tipos de movimentos, assumi-se primeiro que a deformação produzida pelas ondas, é tal que, a expansão de volume  $\epsilon$  seja zero, com a deformação consistindo somente de distorção por cisalhamento e rotação. Assim as equações (A.9) tornam-se:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \nabla^2 v \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu \nabla^2 w\end{aligned}\tag{A.10}$$

As ondas representadas por estas equações são denominadas de "ondas de distorção".

Considere agora o caso em que a deformação produzida pelas ondas é não acompanhada de rotação. Já foi visto antes, que a rotação de um elemento sobre os eixos  $x, y, z$  é dada pelas equações (A.2). As condições para que a deformação seja "irrotacional" podem ser representadas na forma:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Estas equações serão satisfeitas se os deslocamentos  $u, v, w$  são derivados de uma única função potencial  $\phi$  na forma:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

sendo assim:

$$\varepsilon = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi$$

e

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi = \nabla^2 u$$

substituindo estas equações em (A.9), encontra-se que:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{A.11})$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Estas equações representam "ondas irrotacionais" ou "ondas de dilatação".

No caso mais geral a propagação de ondas em meio elástico é obtida da superposição de ondas de dilatação e ondas de distorção. Para ambos os tipos a equação da onda tem uma forma comum:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi \quad (\text{A.12})$$

na qual

$$c = c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{A.13})$$

para o caso de ondas de dilatação, e

$$c = c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{A.14})$$

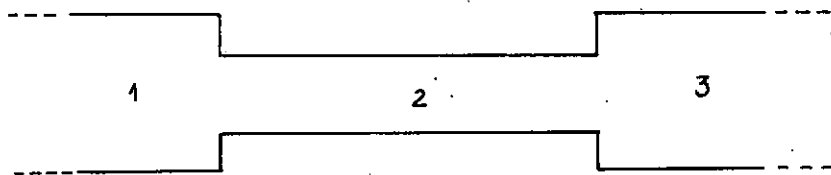
para o caso de ondas de distorção. Sendo que  $c_1$  e  $c_2$  são as velocidades de propagação das ondas respectivamente. É visto que, para pequenas deformações, a propagação das ondas no meio depende exclusivamente de seus parâmetros físicos.



## APÊNCIDE B

## TENSÕES NO OBSTÁCULO BRUSCO - TABELAS

Os resultados numéricos aqui representados, referentes aos efeitos de incidência, reflexão e transmissão, para o impacto dos projêteis longo e curto, se encontram plotados na forma de tabelas. Na construção dessas tabelas procedeu-se da seguinte forma: os números inteiros plotados na primeira linha, correspondem as regiões da barra, ilustradas no esquema abaixo:



Os valores reportados na primeira coluna, correspondem a primeira e segunda etapa do obstáculo, representados pelos números inteiros, enquanto que os números fracionários representam a metade do obstáculo. O objetivo desta divisão está relacionado aos intervalos de  $6 \mu s$  utilizados na aquisição dos valores do pulso incidente, correspondendo ao tempo de propagação do pulso para a metade do obstáculo em estudo. Na segunda coluna das tabelas, encontram-se os valores das amplitudes das tensões incidentes, tomadas a partir da relação entre a tensão incidente teórica e a tensão máxima obtida experimen-

talmente, utilizada na ordenada dos gráficos na seção 4.1. Nas demais colunas, estão registrados os coeficientes de reflexão e transmissão, representados pelas letras  $r$  e  $t$  respectivamente, cujos índices indicam as regiões da barra. Os sentidos de propagação do pulso no interior da barra, são indicados pelas setas localizadas abaixo de cada coeficiente.

Os valores computados nas tabelas e utilizados na construção dos gráficos da seção 4.1, correspondem as colunas: 2 para os pulsos incidentes na barra, 3 e 4 para os pulsos refletidos ao longo do obstáculo, observando aqui o efeito de superposição dos pulsos em cada caso, e por último as colunas 3 para os pulsos transmitido após o obstáculo.

TABELA 1 - PROJÉTIL LONGO

	1			2			3
$t/q/c$	$\sigma_i$ $\rightarrow$ ( $10^{-2}$ )	$r_{1,2} = -3/5$ $\leftarrow$ ( $10^{-2}$ )	$t_{21} = 2/5$ $\leftarrow$ ( $10^{-2}$ )	$t_{12} = 8/5$ $\rightarrow$ ( $10^{-2}$ )	$r_{21} = 3/5$ $\rightarrow$ ( $10^{-2}$ )	$r_{23} = 3/5$ $\leftarrow$ ( $10^{-2}$ )	$t_{23} = 2/5$ $\rightarrow$ ( $10^{-2}$ )
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$1/2$	8.62	- 5.17	0.00	13.79	0.00	0.00	0.00
1	15.52	- 9.31	0.00	24.83	0.00	8.27	5.52
$3/2$	77.59	- 46.55	0.00	124.14	0.00	14.90	9.93
2	89.65	- 51.99	0.00	143.44	0.00	74.48	49.65
$5/2$	93.00	- 55.80	3.31	148.80	4.96	86.06	57.37
3	96.55	- 57.93	5.96	154.48	8.94	92.26	61.5
$7/2$	98.27	- 58.96	29.80	157.20	44.69	98.05	65.37
4	100.00	- 60.00	34.42	160.00	51.64	121.13	80.75
$9/2$	100.00	- 60.00	36.90	160.00	53.36	126.98	84.66
5	98.27	- 58.96	39.22	157.20	58.83	128.02	85.34
$11/2$	96.55	- 57.96	48.45	154.48	72.68	129.62	86.41
6	91.38	- 54.83	50.79	146.21	76.20	136.30	90.86
$13/2$	68.96	- 41.38	51.21	110.34	76.80	133.44	88.96
7	44.83	- 26.90	51.85	71.73	77.77	112.30	74.86
$15/2$	34.48	- 20.69	54.52	55.17	81.78	87.70	59.80
8	29.30	- 17.58	53.38	46.88	80.06	82.17	54.78
$17/2$	25.86	- 15.52	44.92	41.37	67.38	76.16	50.77
9	24.14	- 14.48	35.88	38.62	53.82	65.25	43.50
$19/2$	22.40	- 13.44	32.87	35.84	49.30	55.46	36.97
10	22.40	- 13.44	30.46	35.84	45.69	51.46	34.06
$21/2$	20.7	- 12.42	26.10	33.12	39.15	48.92	32.60
11	18.96	- 11.37	22.20	30.34	33.27	43.36	28.91
$23/2$	16.38	- 9.83	20.58	26.21	30.87	38.16	25.44

TABELA 1 - PROJÉTIL LONGO

Continuação

	1			2			3
$t/l_c$	$\sigma_i$ $\overrightarrow{\quad}$ ( $10^{-2}$ )	$r_{1,2} = -3/5$ $\overleftarrow{\quad}$ ( $10^{-2}$ )	$t_{21} = 2/5$ $\overleftarrow{\quad}$ ( $10^{-2}$ )	$t_{12} = 8/5$ $\overrightarrow{\quad}$ ( $10^{-2}$ )	$r_{21} = 3/5$ $\overrightarrow{\quad}$ ( $10^{-2}$ )	$r_{23} = 3/5$ $\overleftarrow{\quad}$ ( $10^{-2}$ )	$t_{23} = 2/5$ $\overrightarrow{\quad}$ ( $10^{-2}$ )
12	12.07	- 7.24	19.57	19.30	29.35	34.25	22.83
$25/2$	5.17	- 3.10	17.34	8.27	26.01	29.19	19.46
13	1.72	- 1.03	15.26	2.75	22.9	20.57	13.70
$27/2$	0.00	0.00	13.70	0.00	20.55	15.39	10.26
14	0.00	0.00	11.67	0.00	17.50	12.33	8.22
$29/2$	0.00	0.00	8.23	0.00	12.34	10.50	7.00
15	0.00	0.00	6.15	0.00	9.23	7.40	4.94
$31/2$	0.00	0.00	4.90	0.00	7.40	6.14	3.70
16	0.00	0.00	4.20	0.00	6.30	4.44	2.96
$33/2$	0.00	0.00	2.98	0.00	4.44	3.78	2.52
17	0.00	0.00	2.46	0.00	3.68	2.66	1.77
$35/2$	0.00	0.00	2.18	0.00	2.66	2.21	1.47
18	0.00	0.00	1.50	0.00	2.27	1.59	1.06

TABELA 2 - PROJÉTIL CURTO

	1			2			3
$t_{2/c}$	$\sigma_i$ $\rightarrow$ ( $10^{-2}$ )	$r_{12} = -3/5$ $\leftarrow$ ( $10^{-2}$ )	$t_{21} = 2/5$ $\leftarrow$ ( $10^{-2}$ )	$t_{12} = 8/5$ $\rightarrow$ ( $10^{-2}$ )	$r_{21} = 3/5$ $\rightarrow$ ( $10^{-2}$ )	$r_{23} = 3/5$ $\leftarrow$ ( $10^{-2}$ )	$t_{23} = 2/5$ $\rightarrow$ ( $10^{-2}$ )
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$1/2$	8.33	- 4.99	0.00	13.33	0.00	0.00	0.00
1	29.20	- 17.52	0.00	46.72	0.00	7.99	5.33
$3/2$	70.80	- 42.48	0.00	113.28	0.00	28.03	18.69
2	91.67	- 55.00	0.00	146.67	0.00	67.97	45.31
$5/2$	100.00	- 60.00	3.20	160.00	4.80	88.00	58.67
3	89.58	- 53.75	11.21	143.33	16.82	98.87	65.92
$7/2$	72.92	- 43.75	27.20	116.67	40.78	96.09	64.06
4	56.25	- 33.75	32.20	90.00	52.80	94.50	62.98
$9/2$	35.42	- 21.25	39.55	56.67	59.30	85.68	57.12
5	16.67	- 10.00	38.40	26.67	57.60	69.58	46.39
$11/2$	6.25	- 3.75	37.80	10.00	56.70	50.59	33.71
6	0.00	0.00	34.27	0.00	51.40	40.02	26.68
$13/2$	0.00	0.00	27.80	0.00	24.01	30.80	20.56
7	0.00	0.00	20.24	0.00	18.48	14.41	9.60
$15/2$	0.00	0.00	16.00	0.00	8.64	11.09	7.39
8	0.00	0.00	12.32	0.00	6.65	5.19	3.46
$17/2$	0.00	0.00	5.76	0.00	3.11	3.99	2.66
9	0.00	0.00	4.44	0.00	2.39	1.87	1.24
$19/2$	0.00	0.00	2.08	0.00	1.12	1.43	0.96
10	0.00	0.00	1.59	0.00	-	-	-
$21/2$	0.00	0.00	0.75	0.00	-	-	-
11	0.00	0.00	0.57	0.00	-	-	-

## BIBLIOGRAFIA

- [1] - HOLSKY, H. - "Stress Waves in Solids" - Dover Publications, Inc. New York, 1953.
- [2] - ACHEMBACH, I.D. - "Wave Propagation in Elastic Solids" - American Elsevier Publishing Company - Inc. New York, 1973.
- [3] - JOHNSON, W. - "Impact Strength of Materials" - Edward Arnold Publishers Ltd-London - 1972.
- [4] - GOLDSMITH, W. - "Impact - the Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids" - Edward Arnold (publishers) Ltd-London - 1960.
- [5] - DAVIDS, N. & KESTI, N. - "Stress Wave Effects in the Design of Long Bars and Stepped Shafts" - I.J.M.S., 7, 759-769 (1965).
- [6] - AMES, W.F. - "Numerical Methods for Partial Differential Equations" - Academic Press, Inc. New York, 1977.
- [7] - ZINDELUK, M. - "O Método de Riemann na Propagação de ondas em meios Elásticos Inomogêneos" - COPPE/UFRJ, 1978.
- [8] - STOKER, J.J. - "Water Waves - the Mathematical Theory With Applications" - Interscience Publishers, Inc. - New York, 1957.
- [9] - WYLIE, E.B. & STREETER, V.L. - "Fluid Transients" - McGraw - Hill Inc. - USA, 1978.
- [10] - STIOPIN, P.A. - "Resistência de Materiais" - Editorial Mir Moscú, 1979.
- [11] - "Description and Operating Manual for a Split Pressure Bar System for Dynamic Materials Testing in Tension and Compression" - Prepared for: UFRJ-COPPE, Rio de Janeiro.
- [12] - CUNNINGHAM, D.M. & GOLDSMITH, W. - "Short-Time Impulses Produced by Longitudinal Impact" - Proc. Soc. Exp. Stress Anal., 16, nº 2, 1959, 153.

- [13] - SEARS, J.E., JOHN'S COLLEGE, B.A. ST - "On the Longitudinal Impact of Metal Rods With Rounded Ends"-Proc. of the Camb. Phil. Soc., Vol. 14, Part 3, 1907.
- [14] - WAGSTAFF, J.E. - "Experiments on the Duration of Impacts, Mainly of Bars With Rounded Ends, in Elucidation of the Elastic Theory"- Proc. Roy. Soc. Lond., A, 105, 1924, 544.
- [15] - RIPPERGER, E.A. - "Longitudinal Impact of Cylindrical Bars" - Proc. Soc. Exp. Stress Anal. - 10, nº 1, 1952, 209.
- [16] - PROWSE, W.A. - "The Development of Pressure Waves During the Longitudinal Impact of Bars" - Phil. Mag., Ser.7, Vol. 22, 1936, 220.
- [17] - AQUINO, E.M.F. & ZINDELUK, M. - "Filtragem de Pulsos em Barras por Variação de Seção Transversal"-VI Congr. Bras. Eng. Mec., Vol. C, nº 12, 121-130, 1981.
- [18] - FERREIRA, C.H. - "Ponte de Extensômetros em Corrente Contínua, 2 Canais - Amplificador Diferencial" - Relatório nº 01/81, Eng. Mec., Lab. de Vibrações e Acústica - UFRJ.
- [19] - TIMOSHENKO, S. et GOODIER, J.N. - "Théorie de L'Elasticité" - Librairie Polytechnique, Ch.Béranger - 1961.